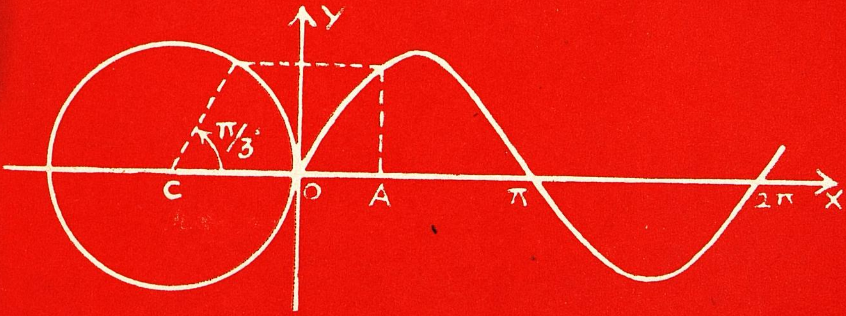
கணிதம்

மேல்நிலை—முதலாம் ஆண்டு

தொகுதி II



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

கணிதம்

தொகுதி II

மேல்நிலை - முதலாம் ஆண்டு

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

முதல் பதிப்பு—1978

(தமிழ்நாட்டு அரசு ஆணைக்கிணங்க அமைக்கப்பட்ட குழுவினால் தயாரிக்கப்பட்டது.)

விலை : ரூ. 3-40

இந்நூல் 60 ஜி. எஸ். எம். தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.

அச்சிட்டோர் :
தி ஸ்ரீநிவாஸம் பிரஸ் ஆப் ஜூபிடர் எண்டர்பிரைசஸ்,
சென்னை—600 002

பொருளடக்கம்

பக்கம்

பகுதி C - ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம்

1.	தளத்தில் உள்ள புள்ளி	... 281
2.	நேர்கோடு	... 294
3.	இரட்டைக்கோடுகள்	... 319
4.	வட்டம்	... 323
5.	கூம்பு வளைவுகள்	... 340
	விடைகள்	... 377

பகுதி D - நுண்கணிதம்

	அறிமுகம்	... 382
1.	எல்லைகளும் தொடருடைத் தன்மையும்	... 383
2.	வகைக்கெழு	... 404
3.	தொகை காணல்	... 436
	விடைகள்	... 446

பகுதி E

கணிதத் தருக்க முறை	... 453
விடைகள்	... 475

பகுதி F

செயல் நிரல் காட்டி	... 478

பகுதி G

கணித வடிவமைப்பு	... 501
விடைகள்	... 528

பகுதி C

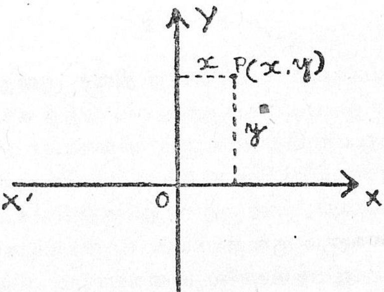
ஆயத்தொலை வடிவ கணிதம்

1. தளத்தில் உள்ள புள்ளி

1-1. அறிமுகம்

தளத்தில் உள்ள வடிவகணித வளைவரைகளை, x, y என்ற இரண்டு மெய் எண்களைக்கொண்ட சமன்பாடுகள் வழியாக முதன் முதலாக ஆராய்ந்தவர், பிரான்ஸ் நாட்டுக்கணித வல்லுநரும், தத்துவ ஞானியுமான ரேன் டெஸ்கார்ட் (Rene Descartes) (1596-1650) என்பவர் ஆவர். வரிசைப்படுத்தப்பெற்ற இந்த இரண்டு எண்களின் ஜோடி (x, y), ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளைக் குறிக்கும். தளத்தில், $X'OX$, $Y'OY$ என்பவை இரண்டு நிலையான ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான கோடுகள். இவைகள் சந்திக்கும் புள்ளி O, ஆதி எனப்படும். இக் கோடுகள் ஆய அச்சுகள் எனப்படும்.

P, ஏதேனுமொரு புள்ளி. OY என்ற Y-அச்சிலிருந்து, OX என்ற X-அச்சுக்கு இணையாக உள்ள P-ன் தொலைவு, P-ன் x-ஆயத் தொலை எனப்படும். இதே போல, OX-லிருந்து OY-க்கு இணையாயுள்ள P-யின் தொலைவு, P-யின் y-ஆயத் தொலை எனப்படும்.



படம் 1 - 1

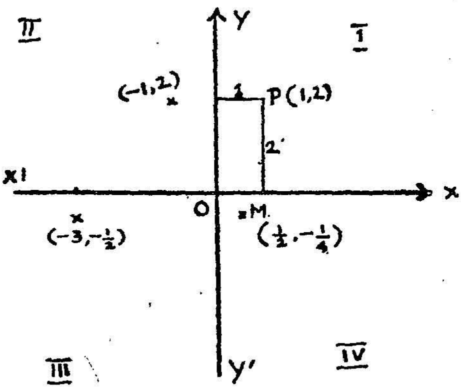
இவ்விதம் P என்ற புள்ளி (x, y) என்ற ஒரு ஜோடி எண்களால் முற்றிலும் குறிக்கப்படுகிறது. P என்ற புள்ளியை

இவ்வித ஆயத் தொலைகளால் குறிக்கும் முறைக்கு 'கார்ட்டீசியன் முறை' (Cartesian Method) எனப் பெயர்.

1-2. முழு தளத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்கும் முறை

சில எடுத்துக்காட்டுகள்

முழு தளத்தை $X'OX$, $Y'OY$ என்ற ஆயஅச்சுகளால் நான்கு காற்பகுதிகளாகப் (Quadrants) பிரிக்கலாம்.



படம் 1 - 2

XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ என்ற காற்பகுதிகள் முறையே, முதலாம், இரண்டாம், மூன்றும், நான்காம் காற்பகுதிகள் எனப் படும் (படம் 1-2). X - அச்சில், OX என்ற திசையை மிகை திசையாகவும், OX' என்ற திசையைக் குறை திசையாகவும் கருதுவது மரபு. இதே போல Y-அச்சில் OY என்ற திசை மிகை திசையாகவும், OY' என்ற திசை குறை திசையாகவும் கருதப்படுகிறது. இப்படிக் கருதுவதால், முதற் காற்பகுதியிலுள்ள புள்ளியின் இரு ஆயத் தொலைகளும் மிகையாகவும், இரண்டாம் காற்பகுதியிலுள்ள புள்ளியின் x-ஆயத் தொலை குறையாயும், y ஆயத் தொலை மிகையாயும், மூன்றும் காற்பகுதியில் உள்ள புள்ளியின் இரு ஆயத் தொலைகளும் குறையாயும், நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ள புள்ளியின் x-ஆயத்தொலை மிகையாயும் y-ஆயத்தொலை குறையாயும் அமைவதைப் பார்க்கலாம். உதாரணமாக $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-3-\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ என்ற புள்ளிகள் முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றும், நான்காம் காற்பகுதியில் இருப்பதைக் காணலாம். $P(1, 2)$ என்ற புள்ளியைக்குறிக்க, முதலில் OX என்ற திசையில் $OM = 1$ என்ற தொலைவு நகர்ந்து, பிறகு இதற்குச் செங்குத்துத் திசையில் $MP = 2$ என்ற தொலைவு நகரவேண்டும்.

பயிற்சி 1 - 1

கீழ்க் கண்ட புள்ளிகளை ஒரு வரைபடத்தில் குறிக்கவும்.

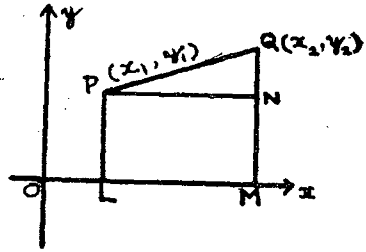
(1) $(2, -3)$ (2) $(-2, -\frac{1}{2})$ (3) $(-\frac{1}{3}, 1)$

(4) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (5) $(0, -1)$ (6) $(-1, 0)$

1-3. இரண்டு புள்ளிகளுக்கிடையேயான தொலைவு

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்ற இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயான தொலைவு $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ என்ற வாய்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகிறது.

நிறுவல் :



படம் 1 - 3

OX-க்குச் செங்குத்தாக PL, QM ஆகியவற்றையும் MQ-க்குச் செங்குத்தாக PNஐயும் வரைக.

$PN = LM = OM - OL$
$= x_2 - x_1$

$NQ = MQ - MN$
$= MQ - LP = y_2 - y_1$

PNQ என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில் $PQ = d$ எனில்,

$d^2 = PQ^2 = PN^2 + NQ^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\therefore d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பு :

மேற்கண்ட நிறுவலில் இரண்டு புள்ளிகளும், முதல் கால் பகுதியில் எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டன. மேற்கூறிய வாய்பாடு,

புள்ளிகள் தளத்தில் எங்கிருப்பினும் பொருந்தும் என்பதை எளிதில் காணலாம். இதேபோல, இக் கணிதத்தில் கிடைக்கும் எல்லா வாய்பாடுகளும் பொதுப்படையாக எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்தும்.]

மாதிரி 1

$(-1, 2)$, $(-3, -2)$ என்ற புள்ளிகளுக்கு இடைப்பட்டத் தொலைவைக் காண்க.

இங்கு $x_1 = -1,\ y_1 = 2$

$$x_2 = -3,\ y_2 = -2$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(-1 + 3)^2 + (2 + 2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$$

பயிற்சி 1 - 2

கீழ்க் கண்ட புள்ளி ஜோடிகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவுகளைக் காண்க.

(1) $(2, -1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (2) $(-1, 1)$, $(-2, 2)$

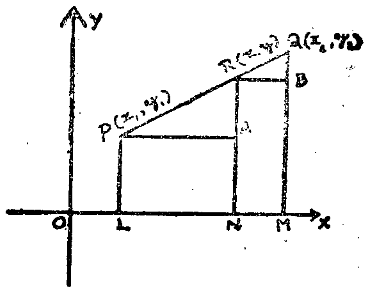
(3) $(0, 1)$, $(-1, 0)$ (4) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(0, 0)$

(5) $(0, 0)$, (x_1, y_1).

1-4. இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டினை ஒரு குறிப்பிட்ட விகிதத்தில் பிரித்தல்

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். PQ-வை $R(x, y)$ என்ற புள்ளி, உட்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்

-தில் பிரிக்கட்டும். அதாவது $\frac{PR}{RQ} = \frac{l}{m}$. OX-க்குச் செங்குத்தாக PL, QM, RN வரை. NR, MQ-க்குச் செங்குத்துகளாக PA, RB வரை. முக்கோணங்கள் PAR, RBQ வடிவொத்தவை.



படம் 1 - 4

$$\therefore \quad \frac{PA}{RB} = \frac{AR}{BQ} = \frac{PR}{RQ} = \frac{l}{m}$$

$PA = x - x_1$; $RB = x_2 - x$; $AR = y - y_1$, $BQ = y_2 - y$.

$$\therefore \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{l}{m}$$

$$\therefore \quad m(x - x_1) = l(x_2 - x)$$

அல்லது $x(l + m) = l x_2 + m x_1$

அல்லது $x = \dfrac{l x_2 + m x_1}{l + m}$

இதேபோல $y = \dfrac{l y_2 + m y_1}{l + m}$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது, R, $\left\{\dfrac{l x_2 + m x_1}{l + m}, \dfrac{l y_2 + m y_1}{l + m}\right\}$ என ஆகிறது.

[குறிப்பு :

(1) R, PQ வை வெளிப்புறமாக $l : m$ என்ற விகிதத்தில் பிரித்தால், விகிதத்தை $l : -m$ எனக் கருதலாம். இப்பொழுது

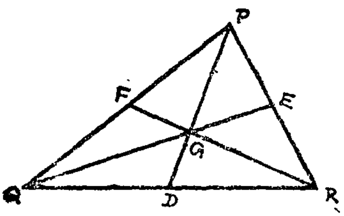
R, $\left\{\dfrac{l x_2 - m x_1}{l - m}, \dfrac{l y_2 - m y_1}{l - m}\right\}$ எனக் கிடைக்கிறது.

(2) R, PQ வின் மையப் புள்ளியானால் $l = m$ என ஆகிறது. முதல் வாய்பாட்டில் இதைப் பிரதியிட, R, $\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right\}$ எனக் கிடைக்கிறது.

(3) ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்றால், அதன் நடுக் கோட்டுச் சந்தியின் (Centroid) ஆயத் தொலைகள் $\left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\}$ ஆகும்.]

நிறுவல் :

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ முக்கோணத்தின் உச்சிகள். D, E, F பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள்.



படம் 1 – 5

PD, QE, RF என்ற நடுக் கோடுகள் (Medians), நடுக் கோட்டுச் சந்தி (Centroid) G-ல் சந்திக்கின்றன என்றும், ஒவ்வொரு நடுக் கோட்டையும் G ஆனது 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிக்குமெனவும் தெரியும்.

D, QR-ன் மையப் புள்ளியாகையால்

D, $\left\{\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right\}$ எனக் கிடைக்கிறது.

G, PD யை 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் பிரிப்பதால் Gயின் ஆயத் தொலைகள்

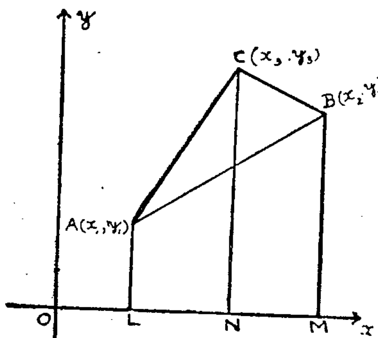
$$\left\{\frac{2\,\frac{(x_2 + x_3)}{2} + x_1}{2 + 1}, \frac{2\,\frac{(y_2 + y_3)}{2} + y_1}{2 + 1}\right\}$$

அதாவது $\left\{\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right\}$ எனக் கிடைக்கிறது.

1-5. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பளவு

ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள், $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்றால், முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\triangle ABC = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ எனக் கிடைக்கிறது.

நிறுவல் :



படம் 1-6

A, B, C யிலிருந்து X-அச்சுக்கு AL, BM, CN என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை வரை.

$\triangle ABC =$ சரிவகம் $ALNC$ + சரிவகம் $CNMB$ − சரிவகம் $ALMB$

எனக் காணலாம்.

அல்லது $\Delta = \frac{1}{2} LN(LA + NC) + \frac{1}{2} NM(NC + MB) - \frac{1}{2} LM(LA + MB)$

$$= \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3) + \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 + y_2) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\Sigma x_1(y_2 - y_3).$$

[குறிப்பு :

(1) A, B, C என்ற சுற்று, கடிகாரத்தின் சுற்றுத் திசைக்கு எதிராக (anticlockwise) இருந்தால், பரப்பு மிகை (positive) ஆகவும், சுற்று கடிகாரத்தின் சுற்றுத் திசையில் (clockwise) இருந்தால், பரப்பு குறைவாகவும் இருக்கும்.

(2) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தால் (collinear), புள்ளிகளால் கிடைக்கப் பெறும் முக்கோணத்தின் பரப்பு பூச்சியம் ஆகும். ஆகையால், 3 புள்ளிகள் ஒரு கோட்டிலமையத் தேவையான, போதுமான கட்டுப்பாடு,

$\Sigma x_1 (y_2 - y_3) = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி :

$(-2, 3)$, $(-5, 7)$ $(5, -3)$ என்ற புள்ளிகளால் கிடைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளை (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனக் கருதவும்.

$$\text{பரப்பு} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2(7+3) - 5(-3-3) + 5(3-7)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-20 + 30 - 20\right] = -5$$

$= 5$ (எண்ணளவில்)

[குறிப்பு :

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி வரிசை, இங்குக் கடிகாரத்தின் சுற்றுத்திசையில் உள்ளதால் பரப்பு குறையாகக் கிடைத்தது.]

பயிற்சி 1 - 3

(1) கீழ்க் கண்ட புள்ளிகளை உச்சிகளாகக்கொண்ட முக்கோணங்களின் பரப்புகளைக் காண்க.

(i) $(0, 0), (1, -1), (-2, 1)$

(ii) $(-1, 2), (-2, 3), (3, -1)$

(iii) $(a, a), (-a, -a), (-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

(2) கீழ்க் கண்ட புள்ளிகள் ஒரு கோட்டில் அமைந்தவை எனக் காட்டுக.

(i) $(3, 7), (6, 5), (15, -1)$

(ii) $(-1, 6), (-10, 12), (-16, 16)$

(iii) $(1, -1), (7, -4), (-5, 2)$

(3) கீழ்க் கண்ட புள்ளிகள் இருசமபக்க முக்கோணங்களை உருவாக்குகின்றன எனக் காண்பி.

(i) $(1, -2), (-5, 1), (1, 4)$

(ii) $(-1, -3), (2, -1), (-1, 1)$

(iii) $(1, 3), (-3, -5), (-3, 0)$

(4) கீழ்க் கண்ட புள்ளிகள் சமபக்க முக்கோணங்களை உருவாக்குகின்றன எனக் காண்பி.

(i) $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-1, -1), (1, 1)$

(ii) $(a, a), (-a, a), (-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$

(iii) $(2, 2), (-2, -2), (-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

(5) கீழ்க் கண்ட புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் உச்சிகள் எனக் காட்டுக.

$(0, -1), (2, 1), (0, 3), (-2, 1).$

சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் நீளத்தைக் காண்க.

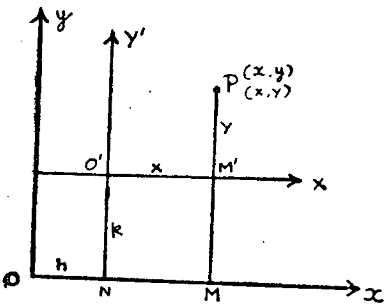
(6) (4, 5), (6, 7), (8, 10) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் நடுக்கோட்டுச் சந்தியைக் காண்க.

(7) ΔABC யின் நடுக்கோட்டுச் சந்தி (2, −3).

$A(6, -2)$, $B(-4, 6)$ என்றால் C என்ன?

1-6. அச்சுகளை நகர்த்துதல்

OX, OY என்ற அச்சுகளின் சார்பாக ஒரு புள்ளி P-யின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) என்க. அச்சுகளைச் சுழற்றுமல் ஆதி O வை $O'(h, k)$ என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்தவும். புதிய X–அச்சு $O'X'$, OX-க்கு இணையாகவும், புதிய Y-அச்சு $O'Y'$, OY-க்கு இணையாகவும் இருப்பதைப் படத்தில் காணலாம்.



படம் 1 - 7

புதிய அச்சுகளின் சார்பாக P-யின் ஆயத் தொலைகள் (X, Y) என்க. படத்தில் $PM'M$, $O'N$ என்பன OX-க்குச் செங்குத்தானவை.

$$x = OM = ON + NM$$
$$= ON + O'M' = h + X$$

என்றும்

$$y = MP = MM' + M'P = NO' + M'P = k + Y$$

என்றும் கிடைக்கின்றன.

அதாவது, $x = X + h$; $y = Y + k$.

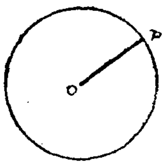
1-7. நியமப் பாதை

தளத்தில் ஏதேனும் ஒரு வடிவ கணித நியதிப்படி ஒரு புள்ளி நகருமானால், அது செல்லும் பாதை ஒரு நியமப் பாதை (locus) எனக் கூறப்படுகிறது.

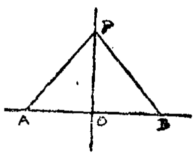
எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து மாறாத தூரத்தில் இருக்குமாறு ஒரு புள்ளி P நகருமானால், P-யின் நியமப் பாதை ஒரு வட்டமாகும். A, B என்ற இரு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து சமதூரத்தில் இருக்குமாறு, ஒரு புள்ளி P நகருமானால் P-யின் நியமப் பாதை, நேர்கோடு AB-யின் மையக் குத்துக் கோடாகும்.

A, B என்ற இரு நிலையான புள்ளிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளி P-யின் தொலைவுகளின் கூடுதல் ஒரு மாறிலி என்றால், P-யின் நியமப் பாதை, நீள் வட்டம் (ellipse) என்ற வளைவரையாகும். இதைப்பற்றி பின்பு பார்க்கப் போகிறோம்.

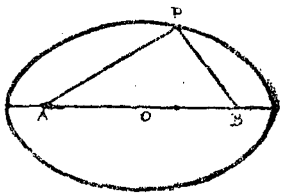
மேற்கூறிய மூன்று நியமப் பாதைகளும், கீழ்க்காணும் 1-8, 1-9, 1-10 என்ற படங்களில் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 1-8



படம் 1-9



படம் 1-10

இவற்றில் P, நகரும் புள்ளி. படம் 1-8-ல், $OP =$ மாறிலி; படம் 1-9-ல் $PA = PB$; படம் 1-10-ல் $PA + PB =$ ஒரு மாறிலி. நியமப் பாதைகள் முறையே, வட்டம், நேர்கோடு, நீள் வட்டம் எனக் காண்கிறோம்.

1-8. நியமப்பாதையின் சமன்பாடு

ஒரு நியமப்பாதையில் எப்புள்ளியைக் கருதினாலும், அப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் x, y ஒரு சமன்பாட்டைச் சரி செய்யும் (satisfy). அச் சமன்பாட்டுக்கு 'நியமப்பாதையின் சமன்பாடு' எனப் பெயர்.

எந்த நியமப்பாதைக்கும் ஒரு வடிவ கணித நியதி உண்டு. பாதையில் உள்ள எந்தப் புள்ளியினுடையவும் அதாவது, P-யின் ஆயத்தொலைகள் (x, y) இந் நியதிக்கு உட்பட்டவை. இந்நியதியை (x, y) யின் சார்பாகக் கூறினால், பாதையின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

படம் 1-8-ல் O ஆதி என்றும், $P(x, y)$ என்றும், $OP = r$ என்றும் கொள்வோம்.

பாதையின் நியதி: $OP = r =$ மாறிலி.

இதை (x, y) சார்பில் கூறுவோம்.

$$OP^2 = r^2$$

அல்லது $x^2 + y^2 = r^2$. இது அந்த வட்டப் பாதையின் சமன்பாடு.

படம் 1-9-ல் புள்ளிகள் A, B, P-ஐ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

நியதி: $PA = PB$

இதை (x, y) சார்பில் கூறுவோம்.

$$PA^2 = PB^2$$

அதாவது, $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$

அதாவது, $x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2) = \dfrac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2}$

எனக் கிடைக்கிறது. இது ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு. இக் கோடு AB-க்குச் செங்குத்தாய் உள்ளதையும், AB-யின் மையப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்வதையும் பிறகு நாம் சரி பார்க்கலாம்.

படம் 1-10-ல் A, B, P-ஐ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

நியதி: $PA + PB = k =$ ஒரு மாறிலி

இதை (x, y) சார்பில் கூறுவோம்.

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} = k$$

இது ஒரு நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு என்பதைப் பிறகு காணலாம்.

பயிற்சி 1 – 4

(1) (1, 0) என்ற புள்ளியிலிருந்து உள்ள தொலைவு, Y-அச்சிலிருந்து உள்ள தொலைவைப்போல் இரு மடங்காக இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் நியமப்பாதையின் சமன்பாடு காண்க.

(2) (−2, 3), (−3, 4) இவற்றைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மையக் குத்துக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(3) (2, 1), (1, 2) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து உள்ள தொலைவுகள் 2 : 1 என்ற விகிதத்தில் இருக்குமாறு இயங்கும் புள்ளியின் சமன்பாடு காண்க.

(4) ஆதியிலிருந்து உள்ள தொலைவு, X-அச்சிலிருந்து உள்ள தொலைவைப்போல் இரு மடங்காக இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் நியமப்பாதை என்ன ?

(5) A (2, 0), B (−2, 0) நிலையான புள்ளிகள். கீழ்க் கண்ட விதம் நகரும் புள்ளி P-யின் நியமப்பாதையின் சமன்பாடு காண்க.

(i) $PA^2 + PB^2 =$ மாறிலி

(ii) $PA^2 - PB^2 =$ மாறிலி

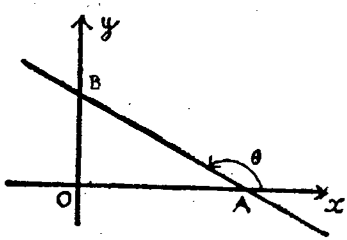
(iii) $PA + PB =$ மாறிலி

(iv) $PA - PB =$ மாறிலி

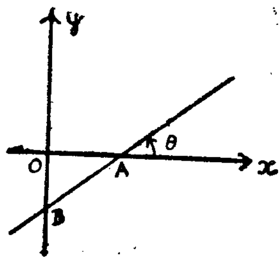
2. நேர்கோடு

2-1. சாய்வு கோணம்

ஒரு நேர்கோடு. x–அச்சின் மிகை திசையுடன் உண்டாக்கும் கோணத்துக்கு, நேர்கோட்டின் சாய்வு கோணம் எனப் பெயர். இதை 'θ' எனக் குறிப்பது மரபு.



படம் 2-1



படம் 2-2

படம் 2-1-ல், சாய்வு கோணம் விரிகோணமாயும் படம் 2-2-ல் சாய்வு கோணம் குறுங்கோணமாயும் உள்ளன.

2-2. சாய்வு விகிதம்

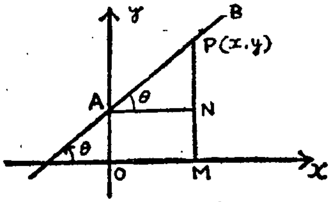
ஒரு நேர்கோட்டின் சாய்வு கோணம் 'θ' வின் இருக்கை விகிதம் ($\tan\theta$), அக்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் (slope) 'm' எனப்படும். அதாவது $m = \tan\theta$.

2-3. அச்சுகளில் வெட்டுத் துண்டுகள்

ஆய அச்சுகளின்மேல் ஒரு நேர்கோட்டினால் பிறப்பிக்கப் படும் பகுதிகளுக்கு வெட்டுத் துண்டுகள் எனப் பெயர்.

படங்கள் 2-1, 2-2-ல் OA, OB என்பன முறையே x, y அச்சுகளின்மேல் உள்ள வெட்டுத் துண்டுகள் ஆகும்.

2-4. சாய்வு விகிதம் 'm', y-அச்சுத் துண்டு 'c' இவற்றின் சார்பாக ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 2 - 3

(1) AB என்ற நேர் கோட்டின் சாய்வுகோணம் 'θ'.

∴ சாய்வு விகிதம் $m = \tan\theta$

y–அச்சுத் துண்டு $c = OA$

$P(x, y)$, AB-யின் மேல் எதேனுமொரு புள்ளி. OX-க்குச் செங்குத்தாக PM–ம், MP-க்குச் செங்குத்தாக AN-ம் வரைக.

$$m = \tan\theta = \tan NAP$$

$$= \frac{NP}{AN}$$

$$= \frac{MP-MN}{AN}$$

$$= \frac{MP-OA}{AN}$$

$$= \frac{y-c}{x}$$

அல்லது $y = mx + c$

∴ AB-யின் சமன்பாடு, $y = mx + c$ எனக் கிடைக்கிறது.

[குறிப்பு :

(1) ஆதிவழி செல்லும் சாய்வு விகிதம் 'm' உடைய நேர் கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$. ஏனெனில், $c = 0$.

(2) X-அச்சுக்கு இணையாக உள்ள ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு $y = c$, ஏனெனில் $\theta = 0$, $m = \tan\theta = 0$ என உள்ளது.

(3) $Q(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், சாய்வு விகிதம் m உடையதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு :

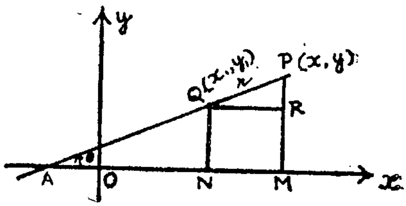
சாய்வு விகிதம் 'm', y-அச்சுத்துண்டு 'c' உடையதுமான ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx+c$. இக்கோடு (x_1, y_1) வழி செல்வதால், $y_1 = mx_1 + c$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore\ c = y_1 - mx_1.$$

$\therefore$ கோட்டின் சமன்பாடு, $y = mx + y_1 - mx_1$ என ஆகிறது. அதாவது $y - y_1 = m(x - x_1)$ எனக் கிடைக்கிறது.

2-5. (x_1, y_1) வழி செல்வதாயும் சாய்வு கோணம் 'θ' கொண்டதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

படம் 2-4-ல், $Q(x_1, y_1)$ என்க. QA என்ற நேர் கோட்டின் சாய்வுகோணம் θ என்க. $P(x, y)$, QA-ல் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. $QP = r$ என்க. QN, PM என்பவற்றை OX-க்குச் செங்குத்தாக வரைக. MP-க்குச் செங்குத்தாக QR-ஐ வரைக.



படம் 2 - 4

$\angle PQR = \angle QAX = \theta$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\Delta\, PQR$-ல், $QR = x - x_1$, $RP = y - y_1$.

$$\frac{QR}{QP} = \cos\theta,\ \frac{RP}{QP} = \sin\theta \text{ என உள்ளது.}$$

$$\therefore\ \frac{x - x_1}{r} = \cos\theta,\ \frac{y - y_1}{r} = \sin\theta$$

அல்லது $\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது AQ என்ற நேர்கோட்டின் சமன்பாடு.

[குறிப்பு :

1. P-யின் ஆயத்தொலைகளை $x=x_1+r\cos\theta$, $y=y_1+r\sin\theta$ எனக் குறிக்கலாம். இதில், r என்பது, Q-வி லிருந்து P-யின் தொலைவு.

2. மேற்கண்ட நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=r$ எனவும் குறிப்பதுண்டு. இதில் r என்பது (x, y) (x_1, y_1) என்றபுள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு.]

2-6. (x_1, y_1) (x_2, y_2) என்ற கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

நேர்கோடு, (x_1, y_1) வழிச்செல்வதால் அதன் சமன்பாட்டை $y-y_1=m(x-x_1)$ என எழுதலாம். இதில் 'm' என்பது, கோட்டின் சாய்வு விகிதம். நேர்கோடு, (x_2, y_2) வழியும் செல்வதால் $y_2-y_1=m(x_2-x_1)$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. இதை முதல் சமன்பாட்டில் பிரதியிட,

கோட்டின் சமன்பாடு $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

அதாவது, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ எனவும் எழுதலாம்.

குறிப்பு :

(x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர் கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ என்ற வாய்பாட்டால் கிடைக்கும்.

2-7. ஆய அச்சு வெட்டுத்துண்டுகளின் சார்பாக, நேர் கோட்டின் சமன்பாடு (வெட்டுத்துண்டு உருவம்)

படம் 2-4-ல் AB என்ற நேர்கோடு, X-அச்சில் $OA = a$ என்ற துண்டையும், Y அச்சில் $OB = b$ என்ற துண்டையும் உருவாக்குகிறது. இப்பொழுது A, $(a, 0)$ என்றும் B $(0, b)$ என்றும் உள்ளன.

இருபுள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ எனப் பார்த்தோம். இங்கு, $(a, 0)$, $(0, b)$ இவற்றை (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனக் கருதினல், AB-யின் சமன்பாடு

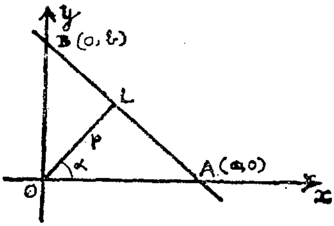
$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$$

அல்லது $$-\frac{(x-a)}{a} = \frac{y}{b}$$

அல்லது $$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$$

அல்லது $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனக் கிடைக்கிறது.

2-8. ஒரு நேர்கோட்டின் செங்கோட்டு உருவச் சமன்பாடு



படம் 2-5

AB என்ற கோட்டுக்கு, ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= p = OL$. OL-ன் சாய்வுகோணம் α என்க. அச்சு வெட்டுத் துண்டுகள், $OA = a$, $OB = b$ என்க. ΔOAL-ல், $\frac{a}{p} = \sec \alpha$ எனவும் ΔOLB-ல், $\frac{b}{p} = \operatorname{cosec} \alpha$ எனவும் கிடைக்கிறது. அதாவது $a = p \sec \alpha$, $b = p \operatorname{cosec} \alpha$.

வெட்டுத்துண்டுகளின் சார்பாக, சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனத் தெரியும். இதில் a, b இவற்றின் மதிப்புகளைப் பிரதியிட $\frac{x}{p \sec \alpha} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} \alpha} = 1$,

அதாவது $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 1

ஒரு நேர்கோடு, x-அச்சுடன் $30°$ சாய்ந்துள்ளது. மற்றும் $(1, 2)$ என்ற புள்ளி வழி செல்கிறது. அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

இங்குச் சாய்வு விகிதம் $m = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(x_1, y_1) என்பது $(1, 2)$

சமன்பாடு : $y - y_1 = m(x - x_1)$

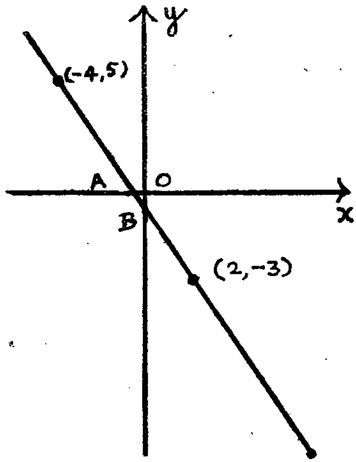
(அ-து.) $y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 1)$

(அ-து.) $x - \sqrt{3}\,y - 1 + 2\sqrt{3} = 0$

மாதிரி 2

$(2, -3)$, $(-4, 5)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. கோடு அச்சுகளில் உண்டாக்கும் துண்டுகள் என்ன ? நேர்கோட்டைத் தோராயமாகப் படத்தில் குறிப்பிடுக.

இங்கு (x_1, y_1) என்பது $(2, -3)$; (x_2, y_2) என்பது $(-4, 5)$



படம் 2 - 6

சமன்பாடு:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

இங்கு, $\frac{x-2}{-4-2}=\frac{y+3}{5+3}$

(அ-து.) $4x+3y+1=0$

இதை, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ என்ற உருவத்தில் எழுதவும்.

$4x+3y=-1$

(அல்லது) $\frac{x}{-\frac{1}{4}}+\frac{y}{-\frac{1}{3}}=1$

$\therefore a=-\frac{1}{4}, y=-\frac{1}{3}$

மாதிரி 3

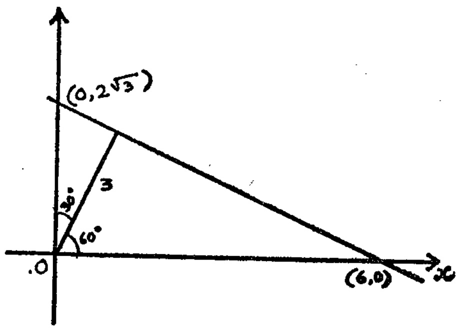
ஆதியிலிருந்து 3 அலகுகள் தொலைவில் உள்ளதும், ஆதியிலிருந்து தன்மேல் வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு, X-அச்சுடன் $60°$ சாய்ந்துள்ளதாயும் இருக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. நேர்கோட்டின் தோராயமான படம் வரைக.

இங்குப் பயன்படும் சமன்பாடு :

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$

இப்பொழுது, $p=3$; $\alpha=60°$

$\therefore$ நேர்கோட்டின் சமன்பாடு,



படம் 2 - 7

$x \cos 60° + y \sin 60° = 3$

(அ-து.) $\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 3$

(அ-து.) $x + \sqrt{3}\, y = 6.$

பயிற்சி 2 - 1

கீழ்க்கண்ட நேர்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க :

(1) Y அச்சில் வெட்டுத்துண்டு $= 2$ எனக் கொண்டதும் X அச்சுடன் $60°$ சாய்வு கோணம் கொண்டதும்.

(2) $(2, -3)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும், X-அச்சுடன் $\frac{\pi}{4}$ கோணம் சாய்ந்துள்ளதும்.

(3) X அச்சுக்கு இணையாயும், அதிலிருந்து -5 தொலைவிலும் உள்ளது.

(4) Y அச்சுக்கு இணையாயும், அதிலிருந்து $4\sqrt{3}$ தொலைவிலும் உள்ளது.

(5) $(-1, 1), (2, 3)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்ப்பது.

(6) ஆய அச்சுகளில் $-\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ என்ற வெட்டுத் துண்டுகளை உண்டாக்குவது.

(7) ஆய அச்சுகளில் சம துண்டுகளை உண்டாக்குவதும், $(2, 7)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும்.

(8) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $p = 5$ எனக் கொண்டது.

(9) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = 7$ எனக் கொண்டது.

2-9. ஒரு நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டின் பொது உருவம்

x, y-ல் பொதுவான ஒருபடிச் சமன்பாடு, $ax + by + c = 0$, எப்பொழுதும் ஒரு நேர்கோட்டைக் குறிக்கும். இதைக் கீழ்க் கண்ட விதம் சரி பார்க்கலாம்.

இச் சமன்பாட்டைச் சரி செய்யும் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்ற ஏதாவது மூன்று புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வோம். அப்படியாயின்,

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$ax_3 + by_3 + c = 0$$

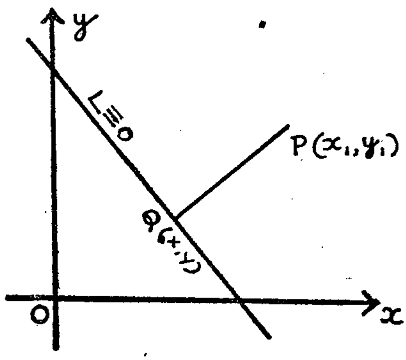
எனக் கிடைக்கிறது.

இச் சமன்பாடுகளை முறையே, $(y_2 - y_3)$, $(y_3 - y_1)$, $(y_1 - y_2)$ என்பவைகளால் பெருக்கி மூன்றையும் கூட்ட

$$a\,[\Sigma\, x_1\,(y_2 - y_3)] = 0 \text{ எனக் கிடைக்கும்.}$$

$a \neq 0$ எனில் $\Sigma\, x_1\,(y_2 - y_3) = 0$ என ஆகும். இக்கட்டுப்பாட்டினால், கருதிய மூன்று புள்ளிகளும் ஒரு நேர் கோட்டில் இருக்கின்றன என அறிகிறோம். ஆகையால் முதலில் கருதிய சமன்பாடு ஒரு நேர் கோட்டைக் குறிக்கிறது எனக் கிடைக்கிறது. ($a = 0$ எனில், சமன்பாடுகளை முறையே $x_2 - x_3$, $x_3 - x_1$, $x_1 - x_2$ இவற்றால் பெருக்கிக் கூட்டினால், அதே முடிவை அடைகிறோம்)

2-10. ***$P\,(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $ax + by + c = 0$ என்ற நேர் கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காணுதல்***



$p\,(x_1, y_1)$-லிருந்து நேர் கோடு $L \equiv ax + by + c = 0$ என்ற கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் பாதம் $Q(X, Y)$ என்க.

படம் 2 - 8

PQ-வின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{Y - y_1}{X - x_1}$

$L = 0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -\dfrac{a}{b}$

ஏனெனில், இதன் சமன்பாட்டை

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \text{ என எழுதலாம்.}$$

PQ-ம் L-ம் செங்குத்துக் கோடுகள். ஆகையால்

$$\left(\frac{Y-y_1}{X-x_1}\right)\left(-\frac{a}{y}\right) = -1$$

(அ-து.) $\dfrac{Y-y_1}{b} = \dfrac{-x_1}{a} = k$ என்க

$$\therefore X = x_1 + ak \; ; \; Y = y_1 + bk$$

$Q(X, Y)$, L என்ற நேர்கோட்டில் உள்ளதால்

$$a(x_1 + ak) + b(y_1 + bk) + c = 0$$

$$\therefore k = -\frac{(a x_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\therefore PQ^2 = (X - x_1)^2 + (Y - y_1)^2 = k^2 (a^2 + b^2)$$

$$\therefore PQ = \pm k\sqrt{a^2 + b^2} = \pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\therefore$ தேவையான செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம்

$$= \pm \frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[குறிப்பு :

1. P, ஆதி என்றால், $x_1 = y_1 = 0$ எனப் பிரதியிட செங்குத்தின் நீளம்

$$= \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ எனக் கிடைக்கும்.

இதேமுடிவை, இத்தேற்ற ஆரம்பத்தில்

$$p = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ என அடைந்துள்ளோம்.

2. ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துகளின் நீளங்களைக் கழித்து, இரு இணைகோடுகளுக்கிடையே உள்ள தொலைவைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$y = 2x + 2$, $y = 2x + 5$ என்ற இணைகோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவைக் காண்க.

சமன்பாடுகளை $2x - y + 2 = 0$, $2x - y + 5 = 0$ என எழுதலாம். ஆதியிலிருந்து இக்கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துகளின் நீளங்கள் முறையே $\frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\frac{-5}{\sqrt{5}}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\therefore$ கோடுகளுக்கு இடையேயுள்ள தொலைவு

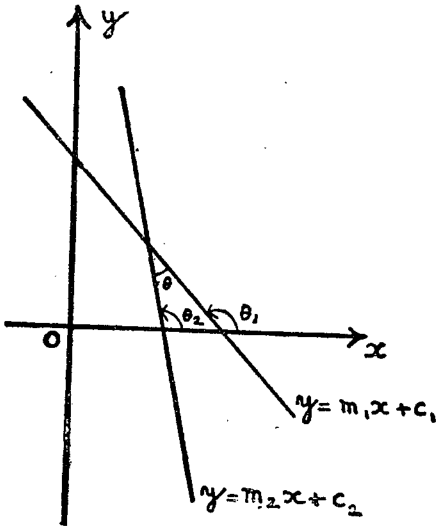
$$= p_1 - p_2 = \frac{-2}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

பொதுவாக, $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$ என்ற இணை கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு

$$= \frac{-c_1 + c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$ அல்லது $$\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

என ஆகும். இதை $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ என எழுதலாம். இங்கு $|c_1 - c_2|$ என்பது c_1, c_2 இவற்றின் வித்தியாசத்தின் எண்ணளவு (modulus) ஆகும்.

2-11. இரண்டு நேர்கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம்



படம் 2 - 9

கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள், $y = m_1 x + c_1$, $y = m_1 x + c$ என்க.

$$\therefore m_1 = \tan\theta_1, \quad m_2 = \tan\theta_2$$

கோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் θ என்க.

படத்திலிருந்து, $\theta = \theta_1 - \theta_2$ எனக் காணலாம்.

$$\therefore \tan\theta = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right)$ என எழுதலாம்.

[குறிப்பு :

1. கோடுகள் இணை என்றால், $\theta = 0$ என ஆகிறது.

$$\therefore \tan\theta = \tan 0 = 0 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$\therefore m_1 = m_2$$

அதாவது, சாய்வு விகிதங்கள் சமம். மறுதலையாக, இரு கோடுகளின் சாய்வு விகிதங்கள் சமமானால், கோடுகள் இணையானவை எனக் காணலாம்.

2. கோடுகள் செங்குத்தானவை என்றால்,

$\theta = 90°$ என ஆகிறது.

$$\therefore \tan\theta = \tan 90° \to \infty = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$\therefore 1 + m_1 m_2 = 0$ அல்லது

$m_1 m_2 = -1$ அல்லது $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

அல்லது $m_2 = \frac{-1}{m_1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

மறுதலையாக, இரு கோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களின் பெருக்கற்பலன் $= -1$ என இருந்தால், கோடுகள் செங்குத்தானவை எனக் காணலாம்.

3. $\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ மிகையாக இருந்தால்,

θ, குறுங் கோணமாயும், குறையாக இருந்தால்

θ, விரிகோணமாயும் இருக்கும்.

4. கோடுகளின் சமன்பாடுகள் பொதுவான உருவத்தில், அதாவது $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$; $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ என இருக்கட்டும்.

முதல் கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$;

இரண்டாவது கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $m_2 = \frac{-a_2}{b_2}$.

கோடுகள் இணையாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு :

$$m_1 = m_2 \text{ (அ-து.) } \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$$

$$\text{(அ-து.) } a_1 b_2 = a_2 b_1$$

கோடுகள் செங்குத்தானவையாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு

$$m_1 m_2 = -1, \text{ (அ-து.) } \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -1$$

$$\text{(அ-து.) } a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0]$$

2·12. மூன்று நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கக் கட்டுப்பாடு

$$L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$L_3 = a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

என்பன கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடுகள் என்க. L_1, L_2 சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் x, y அவற்றின் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால் கிடைக்கும்.

$$\text{அதாவது, } \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \end{matrix}$$

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

(அ-து.) $x = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

L_3 என்ற கோடு இப்புள்ளி வழியே செல்லக் கட்டுப்பாடு:

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

அல்லது, $\Sigma a_3 (b_1c_2 - b_2c_1) = 0$. இதுதான் L_1, L_2, L_3 என்ற மூன்றுகோடுகளும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்கக் கட்டுப்பாடு.

குறிப்பு :

$L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ என்ற நேர்கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளிவழி செல்லும் எந்த ஒரு நேர் கோட்டையும் $L_1 + \lambda L_2 = 0$ அதாவது,

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

என எழுதலாம். இதில் λ ஒரு மாறிலி.

ஏனெனில், $L_1 + \lambda L_2 = 0$ என்ற சமன்பாடு, x, y-ல் ஒரு படியாயும், L_1, L_2 இவை சந்திக்கும் புள்ளியால் சரி செய்யப் படுவதாயும் உள்ளது.

மாதிரி 1

(1, −2), (3, 1) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, $\left(\frac{67}{29}, \frac{37}{29}\right)$ என்ற புள்ளியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்குகிறது எனக் காண்பி.

(1, − 2), $\left(\frac{67}{29}, \frac{37}{29}\right)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும்

கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{\frac{37}{29} + 2}{\frac{67}{29} - 1} = \dfrac{5}{2}$

$(3, 1)$, $\left(\frac{67}{29}, \frac{37}{29}\right)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும்

கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{\frac{37}{29} - 1}{\frac{67}{29} - 3} = -\frac{2}{5}$

∴ இக்கோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களின் பெருக்கற் பலன்

$$= \left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{5}\right) = -1$$

∴ இக்கோடுகள் செங்குத்தாயுள்ளன. ஆகையால் அவற்றுக்கிடையேயான கோணம் செங்கோணமாகும்.

மாதிரி 2

$(4, -3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து, $x + 2y = 3$ என்ற நேர் கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

நேர்கோட்டின் சமன்பாடு : $x + 2y - 3 = 0$.
செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்துக்கான வாய்பாடு :

$$\perp^r = \pm\left(\frac{a x_1 + b y_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

இங்கு, $\perp^r = \dfrac{4 + 2(-3) - 3}{\sqrt{1 + 4}} = -\dfrac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$

$= \sqrt{5}$ (எண்ணளவில்.)

மாதிரி 3

$2x + 3y - 1 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ என்ற நேர் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியை, $(1, -1)$ என்ற புள்ளியுடன் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

கோடுகளின் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க அவைகள் சந்திக்கும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $x = -\frac{5}{11}$, $y = \frac{7}{11}$ எனக் கிடைக்கின்றன. இப்புள்ளியையும், (1, − 1) என்ற புள்ளியையும் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$\frac{x-1}{-\frac{5}{11}-1} = \frac{y+1}{\frac{7}{11}+1}$$

(அ-து.) $18(x-1) = -16(y+1)$

(அ-து.) $9x + 8y - 1 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 4

$\left(-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}\right)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதும், $2x-y+3=0$ என்ற நேர்கோட்டுக்கு (i) இணையாக (ii) செங்குத்தாக உள்ளதுமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(i) $2x-y+3 = 0$ என்ற நேர்கோட்டுக்கு இணையாயுள்ள கோட்டை $2x-y+k=0$ என எழுதலாம். ஏனெனில் இக்கோடுகளின் சாய்வு விகிதங்கள் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

$2x-y+k=0$ என்ற கோடு, $\left(-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}\right)$

என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதால், $-\frac{10}{11} - \frac{7}{11} + k = 0$

அதாவது $k = \frac{17}{11}$ எனக் கிடைக்கிறது.

∴ தேவையான சமன்பாடு , $2x - y + \frac{17}{11} = 0$

அல்லது $22x - 11y + 17 = 0$ என உள்ளது.

(ii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ என்ற கோட்டுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோட்டை, $b_1x - a_1y + k = 0$ என எழுதலாம். ஏனெனில் அவற்றின் சாய்வு விகிதங்களின் பெருக்கற்பலன் $= \left(\frac{-a_1}{b_1}\right)\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -1$ என இருத்தல் வேண்டும்.

∴ இங்கு, $2x - y + 3 = 0$ என்ற கோட்டுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோட்டை, $-x-2y+k = 0$ என எழுதலாம். இக்கோடு $\left(-\frac{5}{11}, \frac{7}{11}\right)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்வதால்,

$\frac{5}{11} - \frac{14}{11} + k = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{அதாவது, } k = \frac{9}{11}.$$

∴ தேவையான சமன்பாடு, $-x - 2y + \frac{9}{11} = 0$

அல்லது, $x + 2y - \frac{9}{11} = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

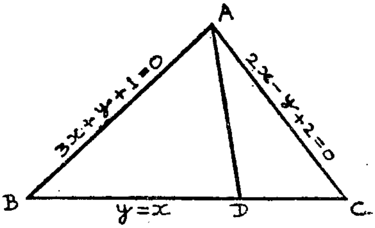
மாதிரி 5

$$3x + y + 1 = 0, \quad 2x - y + 2 = 0, \quad y = x$$

என்ற நேர்கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகளின் (altitudes) சமன்பாடுகள் காண்க.

சமன்பாடுகள் $3x + y + 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$, $y = x$ குறிக்கும் கோடுகளை AB, AC, BC எனக் குறிப்போம்.

AD, BE, CF என்பன முக்கோணத்தின் குத்துக்கோடுகள் (படம் 2-10). குத்துக்கோடு AD-யின் சமன்பாட்டை



படம் 2-10

$(3x + y + 1) + \lambda(2x - y + 2) = 0$ என எழுதலாம்.

(அ-து.) $x(3+2\lambda)+y(1-\lambda)+1+2\lambda=0.$

இதன் சாய்வு விகிதம் $m=-\dfrac{(3+2\lambda)}{1-\lambda}$

இது BC-க்குச் செங்குத்தானது.

BC-யின் சாய்வு விகிதம் $m'=1$

$\therefore -\dfrac{(3+2\lambda)}{1-\lambda}\,.\,1=-1$

(அ-து.) $3+2\lambda=1-\lambda$

(அ-து.) $\lambda=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore$ AD-யின் சமன்பாடு : $x\left(\dfrac{5}{3}\right)+y\left(\dfrac{5}{3}\right)-\dfrac{1}{3}=0$

அதாவது $5x+5y-1=0$

இதே போல, BE, CF இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காணலாம்.

மாதிரி 6

$A(-1,-2)$, $B(3,4)$, $C(1,2)$ என்பவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையத்தைக் (Orthocentre) காண்க.

AD, BE, CF என்ற செங்குத்துக் கோடுகள், O என்ற செங்குத்து மையத்தில் சந்திக்கின்றன.

AD-யின் சமன்பாடு காண்போம்.

BC-யின் சாய்வு விகிதம் $=\dfrac{4-2}{3-1}=1$

$\therefore$ AD-யின் சாய்வு விகிதம் $=-1$

∴ AD-யின் சமன்பாடு : $y+2 = -(x+1)$

(அ-து.) $x+y+3 = 0$

BE-யின் சமன்பாடு காண்போம்.

CA-யின் சாய்வு விகிதம் $= \frac{2+2}{1+1} = 2$

∴ BE-யின் சாய்வு விகிதம் $= -\frac{1}{2}$

∴ BE-யின் சமன்பாடு : $y-4 = -\frac{1}{2}(x-3)$

(அ-து.) $2y-8 = -x+3$

(அ-து.) $x+2y-11 = 0$

AD, BE இவற்றின் சமன்பாடுகளைத் தீர் :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -11 & 1 \end{matrix}$$

$$\frac{x}{-11-6} = \frac{y}{3+11} = \frac{1}{2-1}$$ அல்லது $x = -17,\ y = 14$

∴ செங்குத்து மையம் $(-17, 14)$ எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பு :

CE-யின் சமன்பாட்டைக் கண்டு, அது செங்குத்து மையத்தின் வழியாகச் செல்வதைச் சரி பார்க்கலாம்.

பயிற்சி 2 - 2

(1) $3x - 7y + 11 = 0$ என்ற நேர்கோட்டுக்கு ஆதியிலிருந்து உள்ள செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்தைக் காண்க.

(2) கீழ்க்கண்ட நேர்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

(i) $2x+3y = 5$, $x-y = 7$

(ii) $x+y = 3$, $2x-y = 6$.

(3) கீழ்க்கண்ட நேர்கோடுகள் ஒருபுள்ளிவழிச் செல்கின்றன எனக் காண்பி:

$$2x+3y-1=0, \quad 3x-y+2=0, \quad 7x+5y=0$$

(4) $x-y-2=0$, $11x-4y-6=0$, $3x+4y+k=0$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால் k யின் மதிப்பு என்ன?

(5) $(1,-2), (-3, 8)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத்துண்டை, $3x-2y+4=0$ என்ற நேர்கோடு பிரிக்கும் விகிதத்தைக் காண்க.

(6) $2x-y+5=0$, $x+y+1=0$ என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியை $(3, -1)$ என்ற புள்ளியுடன் இணைக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(7) $3x+y+4=0$, $3x+4y-15=0$, $24x-7y-3=0$ என்ற கோடுகள் ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத்தை உருவாக்குகின்றன எனக் காண்பி.

(8) $x+3y+4=0$, $5x-2y+1=0$ என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழி செல்லும், $x+y=0$, என்ற நேர் கோட்டுக்கு (i) இணையான (ii) செங்குத்தான நேர் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(9) கீழ்க்கண்ட முக்கோணங்களின் செங்குத்து மையத்தைக் காண்க.

(a) முக்கோணத்தின் பக்கங்கள்: $3x+y=0$, $4x+3y=5$, $x+2y=0$

(b) முக்கோணத்தின் உச்சிகள்: $(4, 1)$, $(7, 4)$, $(5, 2)$

(10) $(5,-2), (-1, 2), (1, 4)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையத்தைக் காண்க.

(11) $3x - 4y = 7$, $2x + 5y = 13$ என்ற கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழி செல்லும், $2x - 3y + 5 = 0$ என்ற நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(12) $2x-3y = 7$, $3x-4y = 13$, $8x-11y=33$ என்ற நேர்கோடுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டுக. சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

(13) $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$, $(1, 2)$ என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் சமன்பாடுகள் காண்க. அவை சந்திக்கும் புள்ளி யாது ?

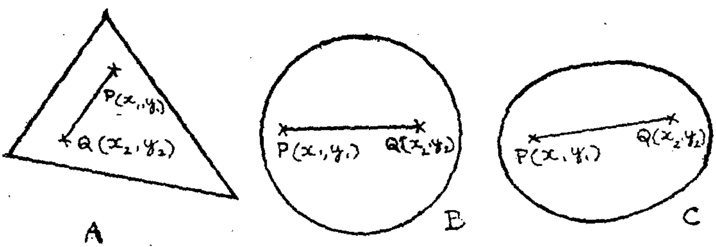
(14) A, B, C என்ற முக்கோணத்தின் உச்சிகள் : $(2, 1)$, $(6, -1)$, $(4, 11)$. A வழிச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(15) $(-2, 3)$, $(2, -1)$, $(4, 0)$ இவற்றை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையத்தைக் காண்க.

2-13. $Ax + By + C > 0$ என்ற சமனின்மையால் குறிக்கப்படும் புள்ளிகள்

வரையறை

S என்பது புள்ளிகளின் ஒரு கணம் என்க. இந்தக் கணத்தில் $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்ற ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகளைச்

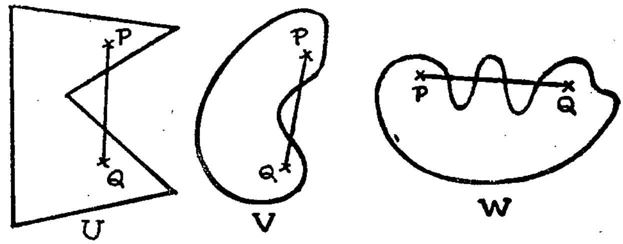


படம் 2 - 11

சேர்க்கும் நேர் கோட்டுத் துண்டு, $\overline{PQ}$ முற்றிலும் கணத்தில் இருந்தால் கணம் *குவிதன்மை உடையது* (Convex) எனப்படும்.

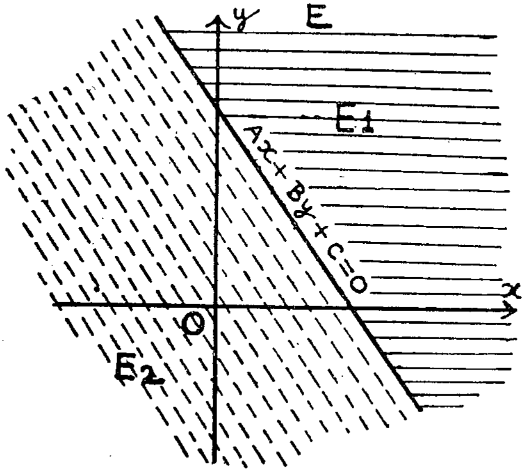
எடுத்துக்காட்டாக, மேற்கண்ட மூன்று படங்களும் குவிதன்மையுடையன.

குவிதன்மை இல்லாத கணங்களும் உள்ளன. கீழ்க்கண்ட படங்கள் இவற்றிற்கு எடுத்துக்காட்டுகள்:



படம் 2 - 12

குவிதன்மையுடைய கணங்கள் கீழ்க்கண்டவாறு மிகவும் பெரிதாகவும் இருக்கலாம்.



படம் 2 - 13

E என்ற தளத்தில், $L: \quad Ax + By + C = 0$ என்பது ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோடு என்க. L-ன் இரு பக்கங்களில் உள்ள பகுதிகள் இரண்டும் குவிதன்மையுடையன. படத்தில், இந்தப் பகுதிகள் E_1, E_2 வெவ்வேறு விதங்களில் கோடிடப்பட்டுள்ளன.

L என்ற கோட்டின் சமன்பாடு : $Ax + By + C = 0$

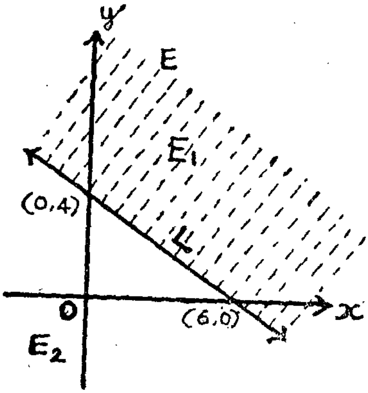
இதை $y = -\frac{(Ax + C)}{B}$ என எழுதலாம்.

$y_1 > y$ என்றால், $y_1 > -\frac{(Ax + C)}{B}$ என ஆகிறது.

அல்லது $Ax + By_1 + C > 0$ என உள்ளது.

$\therefore Ax + By + C > 0$ என்ற சமனின்மை, L-க்கு மேலே யுள்ள பகுதி E_1 ஐக் குறிக்கும்.

இதேபோல, $Ax + By + C > 0$ என்ற சமனின்மை L-க்குக் கீழேயுள்ள பகுதி E_2 வைக் குறிக்கும்.



படம் 2 - 14

மாதிரி

$2x + 3y - 12 > 0$ என்ற சமனின்மையைக் கருதுக.

$2x + 3y - 12 = 0$ என்ற நேர்கோட்டை வரையவும். சமன்பாடு $2x + 3y = 12$, அல்லது

$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$ என்பதால் அச்சுகளில் வெட்டுத் துண்டுகள் $a = 6$, $b = 4$ என உள்ளன (படம் 2-14). இக் கோட்டுக்கு மேலேயுள்ள பகுதி E_1 என்பது $2x + 3y - 12 > 0$ என்ற சமனின்மையால் குறிக்கப்படுகிறது.

கோடிடப்படாத பகுதி, E_2, $2x + 3y - 12 > 0$ என்பதால் குறிக்கப்படுகிறது.

பயிற்சி 2 - 3

கீழ்க்கண்ட சமனின்மைகளால் குறிக்கப்படும் புள்ளித் தொகுதியைப் படத்தில் குறிக்கவும் :

(1) $2x - y > 6$ (2) $x + 3y \leq 8$

(3) $2x + 3y > 10$ (4) $2x - 5y + 10 < 0$

(5) $x - 5y - 6 \geq 0$ (6) $2x - 3y < 7$

3. இரட்டைக் கோடுகள்

3-1. சமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடுகள் (Homogeneous equations of the second degree)

$a_1 x + b_1 y = 0$, $a_2 x + b_2 y = 0$ என்பவை, ஆதி வழிச் செல்லும் இரண்டு நேர் கோடுகள். இக்கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு, $(a_1 x + b_1 y)(a_2 x + b_2 y) = 0$ என ஆகிறது. இதை விரித்து எழுதினால்,

$a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) xy + b_1 b_2 y^2 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. இதை

$ax^2 + 2h xy + by^2 = 0$ என எழுதலாம். அப்பொழுது $a = a_1 a_2$, $2h = a_1 b_2 + a_2 b_1$, $b = b_1 b_2$ என எடுத்துள்ளோம். இதைச் சமன்பாடு, x, y-ல் சமபடித்தான இருபடிச் சமன்பாடு என்பதைப் பார்க்கிறோம்.

மறுதலையாக, x, y-ல் சமபடித்தான எந்த இருபடிச் சமன்பாடும், ஆதிவழி செல்லும் இரு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக் காட்டலாம்.

$a x^2 + 2 h x y + b y^2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுக. இதை, $b \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2h\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0$ என எழுதலாம். இது, $\frac{y}{x}$-ல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு. இதற்கு இரண்டு தீர்வுகள் உண்டு. (தீர்வுகள், மெய்யாகவும் வேறுபட்டதாயும் அல்லது சமமாயும் அல்லது கற்பனையாகவும் இருக்கலாம்). தீர்வுகள் m_1, m_2 என்க.

$$\text{அதாவது } \frac{y}{x} = m_1 \text{ அல்லது } \frac{y}{x} = m_2$$

(அ-து.) $y = m_1 x$ அல்லது $y = m_2 x$ எனக் கிடைக்கிறது. கடைசி இரு சமன்பாடுகளும் ஆதிவழிச் செல்லும் இரு நேர் கோடுகளைக் குறிக்கின்றன.

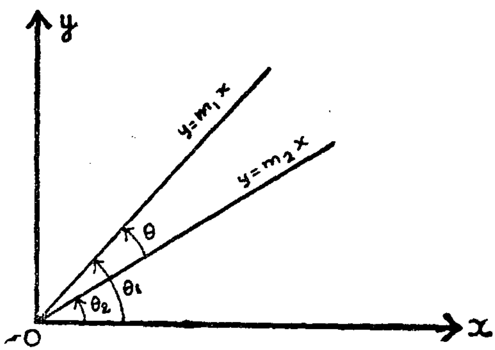
மேலும், தீர்வுகளின் கூடுதல், $m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$ எனவும் அவற்றின் பெருக்கல், $m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$ எனவும் கிடைக்கின்றன.

குறிப்பு :

ஆதிவழி செல்லும் மூன்று கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு, x, y-ல் சமபடித்தான ஒரு மூன்றும்படிச் சமன்பாடு எனக் காண்பிக்கலாம்.

3-2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரு கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள கோணம்

கோடுகள், $y = m_1 x, y = m_2 x$ என்க. அப்படியானால் $m_1 + m_2 = -\dfrac{2h}{b}$; $m_1 m_2 = \dfrac{a}{b}$ எனத் தெரியும். மேலும்,



படம் 3-1

கோடுகளின் சாய்வு கோணங்கள், θ_1, θ_2 என்றால் $m_1 = \tan \theta_1$. $m_2 = \tan \theta_2$ என ஆகிறது. கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் θ என்க. படம் 3-1—லிருந்து $\theta = \theta_1 - \theta_2$ எனப் பார்க்கிறோம். கோடுகளின் நிலைகளைப் பொறுத்து, $\theta = \theta_2 - \theta_1$ எனவும் இருக்கலாம்.

$$\therefore \quad \tan\theta = \pm \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \pm \frac{(\tan\theta_1 - \tan\theta_2)}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$= \pm \frac{(m_1 - m_2)}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4 m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{\dfrac{4h^2}{b^2} - 4\dfrac{a}{b}}}{1 + \dfrac{a}{b}}$$

$$= \pm \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

இதிலிருந்து θ-வைக் காணலாம்.

குறிப்பு :

1. $h^2 - ab = 0$ என்றால் $\tan\theta = 0$, அல்லது $\theta = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆதலால் கோடுகள் ஒன்றோடொன்று இணையும் எனப் பார்க்கிறோம்.

2. $a + b = 0$ என்றால், $\tan\theta \to \infty$ அல்லது $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆதலால் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை எனக் காணலாம்.

மாதிரி

$x^2 - 4xy - 5y^2 = 0$ என்ற கோடுகளுக்கிடையப்பட்ட கோணத்தைக் காண்க.

இங்கு, $a = 1, b = -5, 2h = -4$ அல்லது $h = -2$ என உள்ளன.

∴ இடைப்பட்ட கோணம் θ, கீழ்க்கண்ட விதம் அடையப் படுகிறது.

$$\tan\theta = \frac{\pm 2\sqrt{4+5}}{1-5} = \pm\frac{6}{-4} = \pm\frac{3}{2}$$

∴ கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள குறுங்கோணம்

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 3 - 1

(1) கீழ்க்கண்ட நேர் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணங்களைக் காண்க.

(a) $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$

(b) $4x^2 - 7xy + 2y^2 = 0$

(c) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$

(d) $ax^2 + bxy = 0$

(2) $ax^2 + 3xy - 2y^2 = 0$ என்ற சமன்பாடு, இரண்டு செங்குத்துக் கோடுகளைக் குறிக்கக் கட்டுப்பாட்டைக் காண்க.

(3) $x^2 = 3y$ என்ற வளைவரையும், $2x - 3y = 1$ என்ற நேர் கோடும் சந்திக்கும் புள்ளிகளை ஆதியுடன் இணைக்கும் இரு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாட்டைக் காணவும். கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(வழி : $x^2 = 3y$ என்ற சமன்பாட்டை $2x - 3y = 1$ என்ற சமன்பாட்டினுல் சமப்படித்தானதாகச் செய்யவும்.)

(4) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கொடுக்கும் இரு கோடுகளில், ஒன்றின் சாய்வு விகிதம் மற்றதன் சாய்வு விகிதத்தைப்போல் மூன்று மடங்காகும் என்ருல் $3h^2 = 4ab$ என நிரூபிக்க.

4. வட்டம்

4-1. வட்டத்தின் சமன்பாடு

ஒரு வட்டத்தின் மையம் (a, b) எனவும், அதன் ஆரம் r எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$P(x, y)$ வட்டத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளி.

வட்டத்தின் நியதி, $AP = r =$ மாறிலி என உள்ளது.

$$\therefore AP^2 = r^2$$

அல்லது $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

இது வட்டத்தின் சமன்பாடு.

4-2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் எனக் காண்பிப்போம்.

சமன்பாட்டை

$$x^2 + 2gx + g^2 + y^2 + 2fy + f^2 = g^2 + f^2 - c$$

அல்லது $(x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 - c$.

அல்லது $[x - (-g)]^2 + [y - (-f)]^2 = \left[\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right]^2$
என எழுதலாம்.

இது, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ என்ற உருவத்தில் உள்ளது.

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு, ஒரு வட்டத்தைக்குறிக்கும்.

சமன்பாடுகளை ஒப்பிட,

$a = -g, \; b = -f, \; r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
எனக் கிடைக்கிறது.

∴ குறிப்பிடப்பட்ட வட்டத்தின் மையம் $(-g, -f)$ எனவும், ஆரம் $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ எனவும் உள்ளன. வட்டம் மெய்யாக இருக்க $g^2 + f^2 > c$ என இருத்தல் வேண்டும்.

மாதிரி

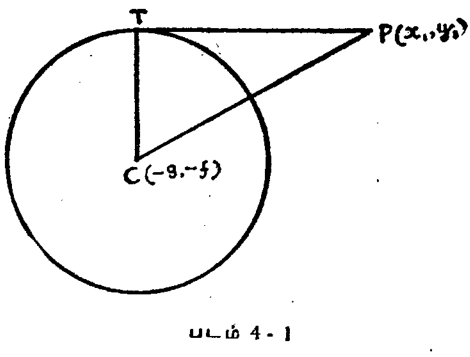
$x^2 + y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம், ஆரம் இவற்றைக் காண்க.

இங்கு $g = \frac{3}{2}$, $f = -2, c = -3$ என உள்ளன.

$$\therefore \text{ மையம் } \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$\text{ஆரம் } = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 3} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

4–3. *$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்துக்கு (x_1, y_1) என்ற வெளிப் புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்.*



படம் 4-1

வட்டமையம் $c\ (-g, -f)$. $P(x_1, y_1)$, வட்டத்துக்கு வெளியேயுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி. (படம் 4-1) PT, P-யி லிருந்து வட்டத்துக்கான தொடுகோடு

$\angle PTC = 90°$ (வட்டத்தின் தன்மை)

$\therefore \quad PT^2 = PC^2 - CT^2$

$$= (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

குறிப்பு :

1. வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் குறிக்கலாம்.

x, y-க்குப் பதிலாக x_1, y_1 எனக் குறித்தால் S என்ற கோவை S_1 எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அதாவது

$$S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$

இதன்படி, P-யிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் $= \sqrt{S_1}$ என்ற வாய்பாட்டினுல் அடையபபடும்.

2. $PT^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$

என்பது, P-யின் வர்க்கம் (power) எனபபடுகிறது. P, வட்டத்துக்கு வெளியில் இருந்தால் P யின் வர்க்கம் மிகையாகவும், வட்டத்தின்மேல் இருந்தால் வர்க்கம் பூச்சியமாகவும், வட்டத்துக்குள் இருந்தால் வர்க்கம் குறையாகவும் இருக்கும்.

4-4. இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ என்பன இரண்டு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள். AB-யை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் வரையவும். $P(x, y)$, வட்டத்தின் மேல் ஏதேனுமொரு புள்ளி.

AP-யின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

$$BP\text{-யின் சாய்வு விகிதம்} = \frac{y - y_2}{x - x_2}$$

$\angle APB = 90°$ என்பதால்

$$\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)\left(\frac{y - y_2}{x - x_2}\right) = -1$$

அல்லது, $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y_1 - y_2) = 0.$

இது, தேவையான சமன்பாடு,

குறிப்பு :

1. இந்தச் சமன்பாட்டை, சாதாரண உருவத்தில் அமைத்தால் $x^2 + y^2 - x(x_1 + x_2) - y(y_1 + y_2) + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

வட்டத்தின் மையம்

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

அதாவது AB-ன் மையப்புள்ளி என்பதைப் பார்க்கிறோம்.

2. வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$a(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy + c = 0$$

என இருந்தால், இதை $x^2 + y^2 + \frac{2gx}{a} + \frac{2fy}{a} + \frac{c}{a} = 0$

என்ற நியம உருவத்தில் எழுத,

$$\text{மையம்} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right)$$

$$\text{ஆரம்} = \sqrt{\frac{g^2}{a^2} + \frac{f^2}{a^2} - \frac{c}{a}}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

4-5. வட்டத்தின்மேல் ஒரு புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்க. வட்டத்தின்மேல் $P(x_1, y_1)$ ஒரு புள்ளி. $C(-g, -f)$ வட்டத்தின் மையம். PT, P-யிடத்துத் தொடுகோடு.

ஆரம் CP–யின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{y_1 + f}{x_1 + g}$

PT, CP-க்குச் செங்குத்தானது.

$\therefore$ PT-யின் சாய்வு விகிதம் $= -\dfrac{(x_1 + g)}{y_1 + f}$

$\therefore$ PT-யின் சமன்பாடு :

$$y - y_1 = -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)(x - x_1)$$

(அ-து.) $(y - y_1)(y_1 + f) + (x - x_1)(x_1 + g) = 0$

(அ-து.) $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

(அ-து.) $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1)$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1$$
$$= -c$$

[ஏனெனில், (x_1, y_1) வட்டத்தின்மேல் உள்ளது.]

(அ-து.) $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

குறிப்பு :

1. இச் சமன்பாட்டை $T = 0$ என எழுதுவது மரபு. பொதுவாக வளைவரையின் சமன்பாட்டை $S = 0$ என எழுதலாம் எனப் பார்த்தோம். S கொடுக்கபபட்டால் அதிலிருந்து T என்பதைக் கீழ்க்கண்ட மாற்றல் அட்டவணைப்படி அடையலாம்.

S	T
x^2	$x x_1$
y^2	$y y_1$
$2xy$	$x y_1 + x_1 y$
$2x$	$x + x_1$
$2y$	$y + y_1$

இதைப் பின்பற்றி,

$$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$$

எனக் கொடுக்கப்பட்டால்,

$$T = xx_1 + yy_1 + g\ (x+x_1) + f\ (y+y_1) + c$$

என உடனே எழுதலாம்.

2. வட்டத்தின் மையம் ஆதி என்றால் அதன் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2$$

என உள்ளது.

மேற்கண்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டில், $g = 0, f = 0,$ $c = -a^2$ எனப் பிரதியிட, (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரை

$$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$$

எனக் கிடைக்கும்.

மேற்கண்ட அட்டவணையின்படியும்

$S = x^2 + y^2 - a^2$ என உள்ளதால்

$T = xx_1 + yy_1 - a^2$ எனக் கிடைக்கிறது.

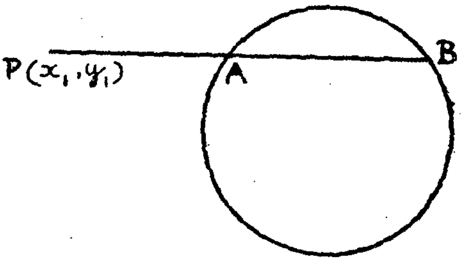
3. $y = mx + c$ என்ற கோடு, $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தைத் தொடக் கட்டுப்பாடு,

$$c^2 = a^2 (1 + m^2)$$

எனக் கிடைக்கும். ஏனெனில், மையத்திலிருந்து கோட்டுக்கு வரையப்படும் செங்குத்து, ஆரத்துக்குச் சமமாக இருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது $\dfrac{c}{\sqrt{1+m^2}} = a$ அல்லது $c^2 = a^2 (1 + m^2)$

4-6. (x_1, y_1) லிருந்து, $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டுச் சோடியின் சேர்ந்த சமன்பாடு.



படம் 4.-2

$P(x_1, y_1)$ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி. P வழி, PAB என்ற நேர் கோடு வட்டத்தை A, B-யில் சந்திக்கிறது.

PAB-யின் சமன்பாட்டை, $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = r$ என எழுதலாம். இதில் r என்பது, கோட்டின் பொதுப்புள்ளி (x, y), கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி (x_1, y_1) இவற்றுக்கிடையேயுள்ள தொலைவு.

அதாவது, $x = r.l + x_1$, $y = rm + y_1$.

இதை வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - a^2 = 0$-ல் பிரதியிட $(rl + x_1)^2 + (rm + y_1)^2 - a^2 = 0$

அல்லது $r^2 (l^2 + m^2) + 2r(lx_1 + my_1) + x_1^2 + y_1^2 - a^2 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது r-ல் ஓர் இருபடிச் சமன்பாடு.

இதன் தீர்வுகள் r_1, r_2 என்பன, PA, PB என்பனவற்றைக் குறிக்கும். B, A-யுடன் இணைந்தால், PAB ஆனது PT அல்லது PT' என்ற தொடுவரையாக மாறுகிறது. இப்பொழுது $PA = PB$ என்றாகிறது.

அதாவது, $r_1 = r_2$. இதற்கான கட்டுப்பாடு,

$$4\,(lx_1 + my_1)^2 = 4\,(l^2 + m^2)\,(x_1^2 + y_1^2 - a^2)$$

இதில், $l = \dfrac{x-x_1}{r}$, $m = \dfrac{y-y_1}{r}$ என்பனவற்றைப் பிரதியிட,

$$[x_1\,(x-x_1) + y_1\,(y-y_1)]^2$$
$$= [(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]\,(x_1^2 + y_1^2 - a^2)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

∴ தேவையான சமன்பாடு:

$$[xx_1 + yy_1 - x_1^2 - y_1^2]^2 = S_1\,[x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2$$
$$- 2\,xx_1 - 2\,yy_1]$$

அல்லது $[xx_1 + yy_1 - a^2 - (x_1^2 + y_1^2 - a^2)]^2$

$$= S_1\,[x^2 + y^2 - a^2 + x_1^2 + y_1^2 - a^2]$$

அல்லது $[T - S_1]^2 = S_1\,[S + S_1 - 2\,T] - 2\,(xx_1 + yy_1 - a^2]$

அல்லது $T^2 - 2\,TS_1 + S_1^2 = S_1\,S + S_1^2 - 2\,TS_1$

அல்லது $SS_1 = T^2$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 1.

(1, 0), (7, 8) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. அதன் மையம், ஆரம் என்ன?

இங்கு, (x_1, y_1) என்பது (1, 0)

(x_2, y_2) என்பது (7, 8)

வட்டத்தின் சமன்பாடு:

$$(x - x_1)\,(x - x_2) + (y - y_1)\,(y - y_2) = 0$$

(அ-து.) $(x-1)(x-7)+(y-0)(y-8)=0$

(அ-து.) $x^2+y^2-8x-8y+7=0$

மையம் : $(-g,-f)$

(அ-து.) $(4, 4)$

ஆரம் : $\sqrt{g^2+f^2-c}$

(அ-து.) $\sqrt{16+16-7}=\sqrt{25}=5$

மாதிரி 2

$(1, 0)$, $(2, 3)$, $(3,-1)$ என்ற புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு :

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்க.

வட்டம், $(1, 0)$ என்ற புள்ளி வழி செல்வதால்,

$$1+2g+c=0 \quad \text{அல்லது} \quad 2g+c=-1$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதேபோல, $(2, 3)$, $(3,-1)$ என்ற புள்ளிகள்வழிச் செல்வதால்,

$$4+9+4g+6f+c=0$$

அல்லது $4g+6f+c=-13$

$$9+1+6g-2f+c=0$$

அல்லது $6g-2f+c=-10$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும், g, f, c-ஐ விடுவிக்க,

$g=\frac{39}{14}$, $f=-\frac{15}{14}$, $c=\frac{32}{7}$ என்று கிடைக்கிறது.

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு :

$$x^2+y^2+\frac{39}{7}x-\frac{15}{7}y+\frac{32}{7}=0$$

அல்லது $7x^2+7y^2+39x-15y+32=0.$

மாதிரி 3

(2, − 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து,

$x^2+y^2-8x-9y+12=0$,

$2x^2+2y^2+x-16y-4=0$

என்ற வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமம் எனக் காண்பி.

வாய்பாடு : $t=\sqrt{S_1}$

ஆதலால், (2, − 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து

$x^2+y^2-8x-9y+12=0$

என்ற வட்டதுக்கான தொடுவரையின் நீளம்.

$$t_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2-8x_1-9y_1+12}$$

$$=\sqrt{4+9-16+27+12}$$

$$=\sqrt{36}=6.$$

இரண்டாம் வட்டததின சமன்பாட்டின் நியமமான உருவம் :

$$x^2+y^2+\frac{x}{2}-8y-2=0.$$

(2, − 3) என்ற புள்ளியிலிருந்து இவ்வட்டத்துக்கான தொடுகோட்டின் நீளம்

$$t_2 = \sqrt{x_1^2 - y_1^2 + \frac{x_1}{2} - 8y_1 - 2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1 + 24 - 2}$$

$$= \sqrt{36} = 6.$$

இவ்விதம் $t_1 = t_2$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 4

P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து,

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0$$

என்ற வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளமும் ஆதியிலிருந்து P-யின் தொலைவும் சமமாக இருக்கும்படி P இயங்கினல், P-யின் நியமப் பாதை காண்க.

P- ஐ (x_1, y_1) என்க.

P-யிலிருந்து வட்டத்துக்கான தொடுகோட்டின் நீளம்

$$t = \sqrt{S_1} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 - 8y_1 - 24}.$$

ஆதியிலிருந்து P-யின் தொலைவு $= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

கொள்கைப்படி, இவ்விரண்டு நீளங்களும் சமம்.

$$\therefore \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 6x_1 - 8y_1 - 24} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ன் நியமப் பாதையின் சமன்பாடு :

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = x^2 + y^2$$

அல்லது $6x - 8y - 24 = 0$

அல்லது $3x - 4y - 12 = 0$

மாதிரி 5

$x^2 + y^2 = 13$ என்ற வட்டத்துக்கு $(3, -2)$ என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு: $T = xx_1 + yy_1 - a^2 = 0.$

இங்கு (x_1, y_1) என்பது $(3, -2)$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு:

$3x - 2y - 13 = 0$

மாதிரி 6

6, − 6 என்ற புள்ளியிலிருந்து, $x^2 + y^2 = 36$ என்ற வட்டத்துக்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டுச் சோடியின் சேர்ந்த சமன்பாடு காண்க.

தேவையான சமன்பாடு: $SS_1 = T^2$

அதாவது $(x^2 + y^2 - 36)(x_1^2 + y_1^2 - 36) = (xx_1 + yy_1 - 36)^2$

அல்லது $(x^2 + y^2 - 36)(36 + 36 - 36) = (6x - 6y - 36)^2$

அல்லது $36(x^2 + y^2 - 36) = 36(x - y - 6)^2$

அல்லது $x^2 + y^2 - 36 = x^2 + y^2 + 36 - 2xy + 12y - 12x$

அல்லது $xy + 6x - 6y - 36 = 0.$

பயிற்சி 4 . 1.

(1) $x^2 + y^2 = 5$ என்ற வட்டத்துக்கு $(1, -2)$ என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க. மேலும் இவ்வட்டம், $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 2 = 0$ என்ற வட்டத்தை $(3, -1)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது எனக் காண்பி.

(2) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ என்ற வட்டத்துக்கு, $3x - 4y = 1$ என்ற கோட்டுக்கு இணையாயுள்ள இரண்டு தொடுவரைகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. இவற்றின் தொடுபுள்ளிகளையும் காண்க.

(3) $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்துக்கு (i) $y=mx+c$ (ii) $lx+my+n=0$ என்ற நேர்கோடு தொடுகோடாக இருக்கக் கட்டுப்பாடு காண்க.

(4) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற வட்டத்தை $lx+my+n=0$ என்ற நேர்கோடு தொடுவதற்கான கட்டுப்பாடு காண்க.

(5) $x^2+y^2=4$ என்ற வட்டத்துக்கு, $(2,-3)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டுச் சோடியின் இணைந்த சமன்பாடு காண்க.

(6) $x^2+y^2-8x-9y+12=0$ என்ற வட்டத்துக்கு $(3,-2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டுச் சோடியின் இணைந்த சமன்பாடு காண்க.

(7) $x^2+y^2+4x+6y-5=0$ என்ற வட்டத்தை $x+2y-3=0$ என்ற நேர்கோடு சந்திக்கும் புள்ளிகளிடத்து வட்டத்தின் தொடுகோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளியைக் காண்க.

(8) ஒரு புள்ளியிலிருந்து, $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்துக்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகளுக்கு இடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமாக இருக்கும்படி புள்ளி இயங்கினால், புள்ளியின் நியமப்பாதை காண்க.

(9) $x^2+y^2-22x+4y+100=0$,

$$x^2+y^2+22x-4y-100=0$$

என்ற வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடுகள் காண்க.

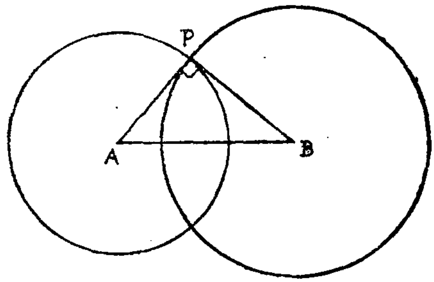
செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டங்கள் **(Orthogonal circles)**

வரையறை

இரண்டு வட்டங்கள் சந்திக்குமிடத்து அவ்வட்டங்களுக்கான தொடு கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம் செங்கோணமாயின், வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் கருதப்படுகிறது.

இருவட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டக் கட்டுப்பாடு காணல்.

$\odot (A)$, $\odot (B)$ என்ற வட்டங்கள் P இடத்து, செங்கோணத்தில் சந்திக்கட்டும். P-யிடத்து, வட்டங்களின் தொடு



படம் 4-8

கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானபடியால், இங்கு ஒரு வட்டத்தின் தொடு கோடு, மற்றதின் ஆரமாக அமைகிறது.

$$\therefore \angle APB = 90^\circ$$

$$\therefore AB^2 = AP^2 + BP^2 \qquad \ldots(1)$$

வட்டங்கள் : $x^2 + y^2 + 2g_1 x + 2f_1 y + c_1 = 0$

$x^2 + y^2 + 2g_2 x + 2f_2 y + c_2 = 0$ என்க.

அப்படியானால்,

$$A(-g_1, -f_1), \quad AP = r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$$

$$B(-g_2, -f_2), \quad BP = r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$$

எனக் கிடைக்கின்றன. இவற்றை (1)-ல் பயன்படுத்த,

$$(-g_1 + g_2)^2 + (-f_1 + f_2)^2 = g_1^2 + f_1^2 - c_1 + g_2^2 + f_2^2 - c_2$$

அல்லது $-2g_1 g_2 - 2f_1 f_2 = -c_1 - c_2$

அல்லது $2g_1 g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$

என்ற கட்டுப்பாடு கிடைக்கிறது.

மாதிரி :

சமன்பாடுகள் $x^2+y^2=1$, $p(x^2+y^2)+qx+ry+p=0$ குறிக்கும் வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் காண்க.

முதல் வட்டம் : $x^2+y^2-1=0$

இங்கு, $g_1=0$, $f_1=0$, $c_1=-1$

இரண்டாம் வட்டம் : $x^2+y^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}y+1=0$

இங்கு $g_2=\frac{q}{2p}$, $f_2=\frac{r}{2p}$, $c_2=1$

கட்டுப்பாடு : $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$

இதில் மேற்கண்ட மதிப்புகளைப் பிரதியிடுவோம்.

இ. கை. ப. $=2\cdot0\cdot\frac{q}{2p}+2\cdot0\cdot\frac{r}{2p}=0.$

வ கை. ப. $=-1+1=0$

கட்டுப்பாடு சரியாவதால், வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன.

பயிற்சி 4 - 2.

(1) கீழ்க்கண்ட வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டுகின்றன எனக் காண்பி.

(i) $x^2+y^2-2x+3y-7=0,$
$x^2+y^2-16x-18y-4=0$

(ii) $x^2+y^2+2x+4y+1=0,$
$x^2+y^2-5x-14y-34=0$

(2) $x^2+y^2+2x+17y+4=0,$

$x^2+y^2+7x+6y+11=0,$

$x^2+y^2-x+22y+3=0$

என்ற மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும் ஒரு வட்டத்தைக் காண்க.

(3) (a) ஒரு புள்ளியிலிருந்து,

$S \equiv x^2+y^2=2g_1\, x+2\, f_1 y+c_1=0,$

$S' \equiv x^2+y^2+2g_2\, x+2\, f_2 y+c_2=0$

என்ற வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் சமநீளங்களாக இருக்குமாறு புள்ளி இயங்கினால், புள்ளியின் நியமப்பாதை ஒரு நேர்கோடு என்றும், அதன் சமன்பாட்டை $S-S'=0$ எனக் குறிக்கலாம் எனவும் காட்டுக. மேலும் இந்த நேர்கோடு, வட்டமையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டுக்குச் செங்குத்தானது எனவும் காட்டுக. [இக் கோட்டுக்கு, வட்டங்களின் சம தொடுகோட்டு அச்சு (Radical axis) எனப் பெயர்.]

(b) $x^2+y^2+x+y-1=0$, $x^2+y^2=1$ என்ற வட்டங்களின் சம தொடுகோட்டு அச்சின் சமன்பாடு காண்க.

(4) மையங்கள் ஒரு நேர் கோட்டில் இல்லாத மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்தால், அவற்றின் மூன்று சம தொடுகோட்டு அச்சுகள் ஒரு புள்ளிவழி செல்லும் எனக் காண்பி. [இப் புள்ளிக்கு, வட்டங்களின் சம தொடு கோட்டு மையம் (Radical centre) எனப் பெயர்.]

(5) இரண்டு வட்டங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றின் சம தொடுகோட்டு அச்சில் மையம் கொண்டதாயும், வட்டங்களைச் செங்கோணத்தில் வெட்டக்கூடியதாயும் உள்ள வட்டங்கள் வரைய முடியும் எனக் காண்பி.

(6) மையங்கள் ஒரு நேர்கோட்டில் இல்லாத மூன்று வட்டங்கள் கொடுக்கப்பட்டால், அவற்றின் சம தொடுகோட்டு

மையத்தை மையமாகக் கொண்டதும், மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டக்கூடியதுமான ஒரு வட்டம் வரைய முடியும் எனக் காண்பி.

இவ்விதத்தில், கீழ்க்கண்ட மூன்று வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$$x^2+y^2-2x+3y-7=0$$

$$x^2+y^2+5x-5y+9=0$$

$$x^2+y^2+7x-9y+29=0$$

5. கூம்பு வளைவுகள்

5-1. ஒரு நேர் வட்டக்கூம்பை (Right Circular Cone) ஒரு தளத்தால் வெவ்வேறு விதங்களில் வெட்டினால், வெவ்வேறு வெட்டுமுகங்கள் கிடைக்கின்றன. இவற்றிற்குக் கூம்பு வளைவுகள் (Conic sections or Conics) எனப் பெயர்.

இக்கூம்பு வளைவுகளை முதலில் கண்டுபிடித்தவர் கிரேக்க நாட்டு மரிக்மஸ் (Mareachmus) (கி. மு. 350) ஆவர். இவர் பிளேட்டோ (Plato) என்ற மூதறிஞர் காலத்தில் வாழ்ந்தவர். ஆர்க்கிமிடீஸ் (Archimedes) (கி. மு. 287-212) என்பவர், இக் கூம்பு வளைவுகளின் வடிவ கணிதத் தன்மைகளை அறிந்திருந்தார் எனக் கூறப்படுகிறது. அப்பொலோனியஸ் (Apollonius) (கி. மு. 262-200), இந்தக் கூம்பு வளைவுகளுக்கு அவற்றின் தன்மையைப் பொறுத்து Ellipse, Hyperbola, Parabola என்ற பெயர்களைக் கொடுத்தார் எனக் கூறப்படுகிறது. இவர் கருத்தில் Ellipse என்றால் ' குறைபாடு ' என்றும், Hyperbola என்றால் 'மிகை' என்றும், Parabola என்றால் 'அருகில் வைப்பது' என்றும் அர்த்தங்கள் காணப்படுகின்றன. டெகார்ட்டே (Descartes) (கி. பி. 1596-1650), முதன்முதலாக இவ்வளை வரைகளின் தன்மைகளை ஆயத்தொலை முறையில் ஆராய்ந்தார். கெப்லர் (Kepler) (கி. பி. 1604) கோள்கள், நீள்வட்டப் பாதைகளில் சூரியனைச் சுற்றி வருகின்றன எனக் கண்டுபிடித்தார், ஆய்லர் (Euler) (கி. பி. 1707-83) இவ்வளைவரைகள் (x, y)-ல் இருபடிச் சமன்பாடுகளால் பிறப்பிக்கப்படுவன எனக் கருதி முற்றிலும் இயற்கணித அடிப்படையில் ஆராய்ந்தார்.

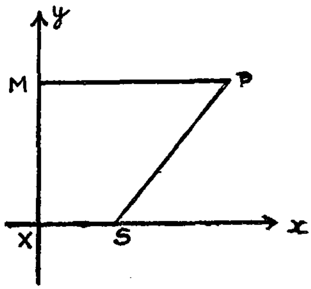
இவ்வளைவரைகளுக்குப் பொதுவாக ஒரு வடிவ கணிதத் தன்மை உள்ளது. இதற்கு (Focus-Directrix Property) குவியம்

இயக்குவரைத் தன்மை எனப்பெயர். இதன் அடிப்படையில், இவ்வளைவரைகளை இந்த அத்தியாயததில் பார்க்கப் போகிறோம்.

குவியம் - இயக்குவரை, வரையறை

ஒரு நிலைப் புள்ளி S, ஒரு நிலை நேர்கோடு l ஆகியவற்றிலிருந்து ஒரு புள்ளி P-யின் தொலைகள் மாருத விகிதத்தில் இருக்குமாறு P இயங்கினுல், P-யின் நியமப் பாதை ஒரு கூம்பு வளைவு ஆகும். இங்கு S என்பது குவியம் (focus) எனவும், l என்பது இயக்குவரை (directrix) எனவும், மாருத விகிதம் e என்பது மையத் தொலைத்தகவு (eccentricity) எனவும் கூறப்படுகிறது. வரையறையின்படி, படத்தில்

$$\frac{SP}{PM} = e \text{ என உள்ளது.}$$



படம் 5·1

$e = 1$, அல்லது $SP = PM$ என இருந்தால் கூம்பு வளைவு, பரவளைவு (Parabola) எனப்படுகிறது.

$e < 1$, அல்லது $SP < PM$ என இருந்தால் கூம்பு வளைவு, நீள் வட்டம் (Ellipse) எனப்படுகிறது.

$e > 1$, அல்லது $SP > PM$ என இருந்தால் கூம்பு வளைவு, அதிபர வளைவு (Hyperbola) எனப்படுகிறது.

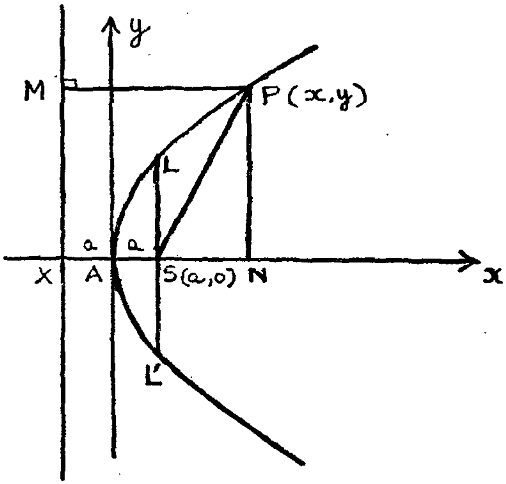
குறிப்பு :

$e = 0$ எனக் கருதும்போது, l கந்தழிக்குச் (infinity) சென்று விடுகிறது எனவும், கூம்பு வளைவு, S-ஐ மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் எனவும் உணரப்படுகிறது.

5-2. நியமமான உருவத்தில் (Standard Form) ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடு ($e = 1$)

S குவியம், XM இயக்குவரை, P பரவளைவில் ஏதேனுமொரு புள்ளி. PM, XM-க்குச் செங்குத்தானது.

A, SX ன் நடுப் புள்ளி என்க. மேலும் $XA = AS = a$ என்க.



படம் 5 - 2

Ay, XS-க்குச் செங்குத்தானது.

AS, Ay ஆகியவற்றை ஆய அச்சுகளாகக் கருதி, P-யின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) என்க.

S, (a, o) என உள்ளது. இப்பொழுது $e = 1$.

ஆகையால், $SP = PM$

அல்லது $SP^2 = PM^2$

அல்லது $(x - a)^2 + y^2 = NX^2 = (x + a)^2$

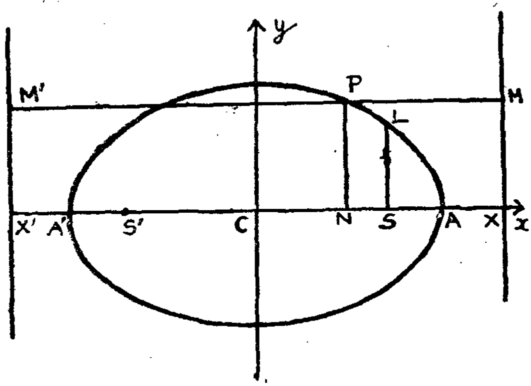
அல்லது $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

அல்லது $y^2 = 4ax$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது பரவளையத்தின் நியமமான உருவச் சமன்பாடு.

5-3. நியமமான உருவத்தில் ஒரு நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு ($e < 1$)

S, குவியம் ; XM, இயக்குவரை. SX, XM-க்குச் செங்குத்தானது. SX-ஐ, $e : 1$ என்ற விகிதத்தில் உட்புறமாக A-யிலும்,



படம் 5 - 3

வெளிப்புறமாக A'-யிலும் பிரிப்போம். C, AA'ன் நடுப் புள்ளி என்க. மேலும் $AC = CA' = a$ என்க. இப்பொழுது

$$\frac{SA}{AX} = \frac{SA'}{A'X} = \frac{e}{1}$$

அல்லது $$e = \frac{SA'}{A'X} = \frac{SA}{AX} = \frac{SA' + SA}{A'X + AX} = \frac{SA' - SA}{A'X - AX}$$

அல்லது $$e = \frac{2a}{2CX} = \frac{2CS}{2a}$$

அல்லது $CS = ae$, $CX = \dfrac{a}{e}$ எனக் கிடைக்கிறது.

C வழி, CA–க்குச் செங்குத்தாக Cy வரை. CA, Cy ஆகியவற்றை ஆய அச்சுகளாக எடுப்போம். $P\ (x, y)$ என்ற

புள்ளி, நீள் வட்டத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளி என்க. PM, XM-க்குச் செங்குத்தானது. வரையறையின்படி, $SP = e\,PM$,

அல்லது $SP^2 = e^2 PM^2$

அல்லது $SN^2 + NP^2 = e^2 NX^2$

அல்லது $(CN - CS)^2 + NP^2 = e^2 (CX - CN)^2$

அல்லது $(x - ae)^2 + y^2 = e^2 \left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

அல்லது $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$

அல்லது $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$

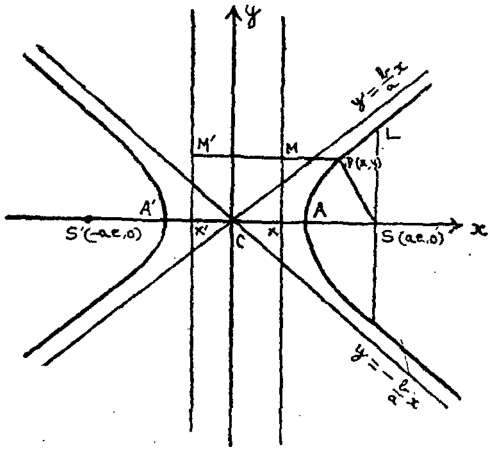
அல்லது $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1$

அல்லது $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

இதில் $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ எனக் கொண்டுள்ளோம.

இது, நீள்வட்டத்தின் நியமமான உருவச்சமன்பாடு.

5-4. *நியமமான உருவத்தில் ஒரு அதிபரவளையின் சமன்பாடு* ($e > 1$)



படம் 5-4

S, குவியம்; XM, இயக்குவரை

SX, XM-க்குச் செங்குத்தானது.

SX ஐ, $e:1$ என்ற விகிதத்தில், உட்புறமாக A-யிலும் வெளிப்புறமாக A'-யிலும் பிரிப்போம். C, AA'-ன் நடுப்புள்ளி. $AC = CA' = a$ என்க.

$$\frac{SA}{AX} = \frac{SA'}{A'X} = \frac{e}{1}$$

அல்லது, $e = \dfrac{SA'}{A'X} = \dfrac{SA}{AX} = \dfrac{SA' + SA}{A'X + AX} = \dfrac{SA' - SA}{A'X - AX}$

அல்லது, $e = \dfrac{2\,CS}{2\,a} = \dfrac{2\,a}{2\,CX}$

அல்லது $CS = ae$, $CX = \dfrac{a}{e}$ எனக் கிடைக்கிறது.

C வழி, CAக்குச் செங்குத்தாக Cy-ஐ வரை.

CA, Cy ஆகியவற்றை ஆய அச்சுகளாக எடுப்போம்.

$P(x, y)$ என்ற புள்ளி, அதிபரவளைவின் மேல் ஏதேனுமொரு புள்ளி என்க. PM, XM-க்குச் செங்குத்தானது. வரையறையின்படி $SP = e\,PM$ என ஆகிறது.

அல்லது $SP^2 = e^2 PM^2$

அல்லது $SN^2 + NP^2 = e^2\,NX^2$

அல்லது $(CN - CS)^2 + NP^2 = e^2\,(CN - CX)^2$

அல்லது $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \dfrac{a}{e}\right)^2$

அல்லது $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$

அல்லது $x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

அல்லது $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$

அல்லது $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

இதில் $b^2 = a^2 \; (e^2-1)$ எனக் கொண்டுள்ளோம்.

இது அதிபர வளைவின் நியமமான உருவச் சமன்பாடு.

(1) *பரவளைவு வரைதல்* (படம் 5·2)

நியமமான உருவச் சமன்பாடு : $y^2 = 4\,ax$

(i) $a > 0$ என்க. $x < 0$ என இருப்பின், $y^2 < 0$ என ஆவதால், y-க்கு மெய்த் தீர்வுகள் இல்லை. ஆதலால், y–அச்சுக்கு இடப் புறத்தில் வளைவரையின் பகுதி இல்லை.

(ii) $x = 0$ என இருக்கும்போது, y-ன் இரு மதிப்புகளும், பூச்சியமாகின்றன. ஆகையால் y-அச்சு, வளைவரைக்கு ஆதியில் தொடுவரையாகிறது.

(iii) x–ன் ஒவ்வொரு மிகை மதிப்புக்கும் ($x > 0$), y-க்கு இரு மதிப்புகள் உள்ளன. இவை சமமாயும், எதிர்க் குறிகள் உள்ளனவாயும் இருக்கின்றன. ஆதலால் வளைவரை, y-அச்சுக்கு வலப் பக்கத்தில் முடிவற்றதாகவும், x-அச்சுக்குச் சமச் சீர்த் தன்மை (Symmetric) கொண்டதாகவும் உள்ளது.

(iv) x-ன் மதிப்பு பூச்சியத்திலிருந்து அதிகரிக்க, y-ன் எண்ணளவும் அதிகரிக்கிறது. ஆகையால், x-அச்சுக்கு மேலே, வளைவரை மேல்நோக்கிச் செல்வதாக அமைகிறது. x-அச்சுக்குக் கீழே, மேற்பகுதியின் பிம்பம் (image) உள்ளது.

மேற்கண்ட குறிப்புகளை ஒருங்கமைத்தால், பரவளைவுக்கு, படம் 5·2-ல் உள்ளதுபோலக் கிடைக்கிறது.

படத்தில் A என்ற புள்ளி, பரவளைவின் அச்சுமுனை (vertex) எனப்படுகிறது. Ay என்ற y-அச்சு, பரவளைவின் முனையிடத்துத்

தொடு கோடு (tangent at the vertex) எனப்படுகிறது. XS-ன் நீட்சி, பரவளேவின் அச்சு (axis) எனப்படுகிறது.

(2) *நீள்வட்டம் வரைதல் (படம் 5-3)*

நியமமான உருவச் சமன்பாடு : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $(a, b > 0)$

(i) இதிலிருந்து, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ எனக் கிடைக்கிறது.

x-ன் எண்ணளவு aஐவிட அதிகமானுல், $y^2 < 0$ என ஆகிறது. ஆகையால் y-க்கு மெய்த் தீர்வு இல்லே. ஆகையால் $x > a$, $x < -a$ என்ற பகுதிகளில், வளேவரை இல்லே. இதேபோல, $y > b, y < -b$ என்ற பகுதிகளிலும், வளேவரை இல்லே என்பதைக் காணலாம். இவ்விதம் நீள்வட்டம், $x = \pm a$, $y = \pm b$ என்ற கோடுகளால் அடைபட்ட செவ்வகத்துள் அடங்கியுள்ளது எனக் காண்கிறேம்.

(ii) $x = \pm a$ என்ற இடங்களில், $y = 0$ எனவும், $y = \pm b$ என்ற இடங்களில் $x = 0$ எனவும் கிடைப்பதால், நீள்வட்டம் x-அச்சைச் சந்திக்கும் A, A' என்ற புள்ளிகளில் $x = \pm a$ என்ற கோடுகள் நீள்வட்டத்துக்குத் தொடுவரைகளாகவும், நீள்வட்டம் y-அச்சைச் சந்திக்கும் B, B' என்ற புள்ளிகளில், $y = \pm b$ என்ற கோடுகள் அதற்குத் தொடுவரைகளாகவும் உள்ளன. AA', BB' என்ற துண்டுகள் முறையே நெட்டச்சு (major axis), குற்றச்சு (minor axis) எனப்படுகின்றன. இவை சந்திக்கும் புள்ளி நீள்வட்டத்தின் மையமாகும். இது இங்கு ஆதியாக உள்ளது. இந்த இரண்டு அச்சுகளும் பிரதம அச்சுகள் (Prinoipal axes) எனப்படும். இவற்றின் நீளங்கள் முறையே $2a$, $2b$ என உள்ளவை. A, A' என்பவை நெட்டச்சு முனேகள் (vertices), B, B' என்பவை குற்றச்சு முனேகள், எனப்படும்.

(iii) $|x| < a$ என்ற x-ன் எந்த மதிப்புக்கும் தகுந்தவாறு, y-க்கு இரு சமமாயும், எதிராயுமுள்ள மதிப்புகள்

உள்ளன. இதேபோல, $|y| < b$ என்ற y-ன் எந்த மதிப்புக்கும் தகுந்தவாறு, x-க்கு இரு சமமாயும், எதிராயுமுள்ள மதிப்புகள் உள்ளன. ஆகையால், நீள்வட்டம் x-அச்சின் சார்பாகவும், y-அச்சின் சார்பாகவும் சமச் சீர்த்தன்மை கொண்டது எனக் காண்கிறோம்.

(iv) x–ன் மதிப்பு அதிகரிக்க, y-ன் மதிப்பு குறைவதால், முதற் காற் பகுதியில், வளைவரை கீழ் நோக்கிச் செல்கிறது. மற்ற பகுதிகளில், சமச்சீர்த் தன்மையால் உருவங்கள் பிம்பங்களாக அடையப்படுகின்றன.

(3) *அதிபர வளைவு வரைதல் (படம் 5·4)*

நியமமான உருவச் சமன்பாடு : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.\ (a, b > 0)$

(i) இதிலிருந்து $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ எனக் கிடைக்கிறது. x-ன் எண்ணளவு a-ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் $y^2 < 0$ என ஆகிறது. ஆகையால் y-க்கு மெய்த் தீர்வு இல்லை ஆகையால் $-a < x < +a$ என்ற பகுதியில் வளைவரை இல்லை என்பதைக் காணலாம்.

(ii) $x = \pm a$ என்ற இடங்களில், $y = 0$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் அதிபர வளைவு, x அச்சைச் சந்திக்கும் A, A' என்ற புள்ளிகளில் $x = \pm a$ என்ற கோடுகள் வளைவரைக்குத் தொடுவரைகளாக உள்ளன. AA' என்ற துண்டு, அதிபர வளைவின் குறுக்கு அச்சு (Transverse axis) எனப்படும். இதன் நீளம் $= 2a$. Cy யில், $CB = b$ எனவும், $CB' = -b$ எனவும் உள்ள B, B' என்ற புள்ளிகளை எடுத்தால், BB' என்ற துண்டு துணை அச்சு (Conjugate axis) எனப்படும். துணை அச்சை, வளைவரை சந்திப்பதில்லை. இரு அச்சுகளும் சந்திக்கும் புள்ளி C, அதிபரவளைவின் மையமாகும். அது இங்கு ஆதியாக உள்ளது.

(iii) $|x| > a$ என்ற x-ன் எந்த மதிப்புக்கும் தகுந்தவாறு, y-க்கு இரு சமமாயும், எதிராயுமுள்ள மதிப்புகள் உள்ளன. இதே போல y-ன் எந்த மதிப்புக்கும் தகுந்தவாறு, x-க்கு இரு சமமாயும்,

எதிராயுமுள்ள மதிப்புகள் உள்ளன. ஆகையால் அதிபரவளைவு x-அச்சின் சார்பாகவும், y-அச்சின் சார்பாகவும் சமச் சீர்த் தன்மை கொண்டது எனக் காண்கிறோம்.

(iv) x-ன் மதிப்பு எண்ணளவில் a-க்கு மேல் அதிகரிக்க, y-ன் மதிப்பும் அதிகமாகிறது. ஆகையால் வளைவரை, முதல் கால் பகுதியில் மேல்நோக்கிச் செல்கிறது. மற்ற பகுதிகளில் சமச் சீர்த் தன்மையால், உருவங்கள் பிம்பங்களாக அடையப் படுகின்றன. மேலும் $x \to \pm \infty$ என இருக்கும்போது, $y \to \pm \infty$ என உள்ளது. ஆகையால் அதிபர வளைவு, நான்கு பகுதிகளிலும், கந்தழி வரையிலும் செல்கிறது.

(v) $y = mx$ என்ற நேர்கோடு, அதிபர வளைவைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் x-ஆயத் தொலைகள்

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right) = 1$$ என்பதால் கொடுக்கப்படு கின்றன. இதில் x, மெய்யெண்ணாக இருக்க $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$ என இருத்தல் வேண்டும். ஆதலால் வளைவரை, $y = \pm \frac{b}{a}$ என்ற நேர்கோடுகளுக்கு இடையில் அடங்கியுள்ளது. $m = \pm \frac{b}{a}$ என இருக்கும்போது, x-ன் மதிப்பு கந்தழியாக உள்ளது. ஆகையால் $y = \pm \frac{b}{a}$ என்ற கோடு வளைவரையைக் கந்தழி யில் தொடுகின்றன. ஆகையால் இக்கோடுகளுக்குக் ***கந்தழித் தொடு கோடுகள்*** (Asymptotes) எனப் பெயர்.

குறிப்பு :

1. நீள்வட்டம், அதிபர வளைவு ஆகியவற்றின் சமச் சீர்த் தன்மைகளால், இவைகளுக்கு S' என்ற மற்றொரு குவியமும், $X'M'$ என்ற மற்றொரு இயக்குவரையும் உள்ளன. பரவளை வுக்கு ஒரு குவியமும் ஓர் இயக்குவரையும் மட்டுமே உள்ளன.

2. நீள்வட்டம், அதிபர வளைவு ஆகியவற்றிற்கு மையப் புள்ளிகள் உள்ளன. ஆகையால் இவற்றிற்கு ***மையங் கொண்ட கூம்பு வளைவுகள்*** (Central Conics) எனப் பெயர். பரவளைவுக்கு மையம் அளவிடக்கூடிய இடத்தில் இல்லை.

3. பொதுவாக எல்லாக் கூம்பு வளைவுகளிலும், குவியம் வழியாகச் செல்லும் இரட்டை y-ஆயத் தொலை (double ordinate), LSL' வளைவரையின் நேரகலம் (Latus rectum) எனப்படும். இதில் பாதியளவு SL, அரை நேரகலம் (Semilatus rectum) எனப்படும்.

இதன் மதிப்பை மூன்று வளைவரைகளிலும் கீழ்க்காணும் வகையில் அடையலாம்.

பரவளைவு : $SL = LK$ (படம் 5.2)

$$= SX$$

$$= 2a.$$

நீள்வட்டம் : $SL = e.LK$ (படம் (5.3)

$$= e \cdot SX = e(CX - CS)$$

$$= e\left(\frac{a}{e} - ae\right) = a(1 - e^2)$$

$$= \frac{a^2(1-e^2)}{a} = \frac{b^2}{a}$$

அதிபரவளைவு : $SL = eLK$ (படம் 5.4)

$$= eSX$$

$$= e(CS - CX)$$

$$= e\left(ae - \frac{a}{e}\right)$$

$$= a(e^2 - 1)$$

$$= \frac{a^2(e^2-1)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

4. ஆதியில் மையங்கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு: $x^2+y^2=a^2$ எனத் தெரியும். சமன்பாடு, $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ என இருந்தால் மையம் (h, k) என்ற புள்ளியில் உள்ளது எனவும் தெரியும்.

இரண்டு சமன்பாடுகளையும் ஒப்பிடும்போது, இரண்டாவதில், x-க்குப் பதிலாக $x-h$-ம், y-க்குப் பதிலாக $y-k$ எனவும் உள்ளன. இதன் விளைவு பட்டத்தில் வட்டத்தின் மையம் ஆதியிலிருந்து, (h, k) என்ற புள்ளிக்கு மாறியுள்ளது என்பதைத் தவிர வேறு ஒரு மாற்றமும் இல்லை. இதேபோல, ஒரு பரவளைவின் சமன்பாடு $(y-k)^2=4a(x-h)$ என இருந்தால், இது $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவுதான்; ஆனால் முனை (h, k) என்ற புள்ளிக்கு மாற்றப்பட்டுள்ளது என அறியவேண்டும். (h, k) என்பது $(0, 0)$ என இருந்தால் இரண்டு சமன்பாடுகளும் ஒன்றிவிடுகின்றன என்பதிலிருந்தும், மேற்கூறிய முடிவு உண்மையெனச் சரிபார்க்கலாம். அதேபோல $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம் (h, k)-ல் உள்ளது என அறியலாம்.

மாதிரி 1:

$4y^2+12x-20y+67=0$ என்ற பரவளைவின் (1) அச்சுமுனை (2) அச்சு (3) குவியம் (4) இயக்குவரை (5) நேரகலம் இவற்றைக் காண்க.

சமன்பாடு :

$$4y^2-20y=-12x-67$$

அல்லது $4\left[\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}\right]=-12x-67$

அல்லது $4\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=-12x-67+25$

அல்லது $\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=-3\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$

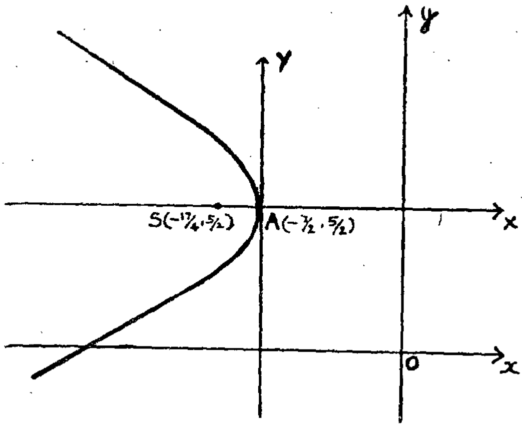
இதிலிருந்து கீழ்க் கண்ட முடிவுகளை அறியலாம்.

(1) அச்சுமுனை : $\left(-\frac{7}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

(2) நேரகலம் $4a = 3$

அல்லது $a = \frac{3}{4}$

(3) வலப் பக்கத்தின் குணகம் குறையாக (negative) இருப்பதால், பரவளைவு இடப் பக்கம் திரும்பியுள்ளது. (படத்தில் காணவும்.)



படம் 5 - 5

(4) குவியம் S : $\left(-\frac{7}{2}-\frac{3}{4},\ \frac{5}{2}\right)$

அதாவது $\left(-\frac{17}{4},\ \frac{5}{2}\right)$

(5) அச்சின் சமன்பாடு : $y = \frac{5}{2}$

(6) இயக்குவரை : $x = -\frac{7}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{11}{4}$

மாதிரி 2

(3, −4) என்பதை குவியமாகவும் $x - y + 5 = 0$ என்பதை இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

$P(x, y)$, பரவளையத்தில் ஏதேனுமொரு புள்ளி என்க.

வரையறையின்படி,

$$SP = PM$$

(அ-து.) $SP^2 = PM^2$

(அ-து.) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = \left(\frac{x-y+5}{\sqrt{2}}\right)^2$

(அ-து.) $2[(x-3)^2 + (y+4)^2] = (x-y+5)^2$

(அ-து.) $x^2 + y^2 + 2xy - 22x + 26y + 25 = 0.$

இது, தேவையான சமன்பாடு.

மாதிரி 3

(1, 2) என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும், $2x - 3y + 6 = 0$ என்பதை உரிய இயக்குவரையாகவும் மையத் தொலைத்தகவு $= \frac{2}{3}$ எனவும் கொண்ட நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

சென்ற மாதிரியில் போல

$$SP = e\,PM$$

அல்லது $SP^2 = e^2\,PM^2$

(அ-து.) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{2x-3y+6}{\sqrt{13}}\right)^2$

(அ-து.) $117\ [x^2+y^2-2x-4y+5]$

$$=4\ [4x^2+9y-12xy+24x+36y+36]^2$$

(அ-து.) தேவையான சமன்பாடு,

$$101x^2+48xy+81y^2-330x-324y+441=0$$

எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 4

$9x^2+4y^2=36$ என்ற நீள்வட்டத்தின் (1) மையம் (2) குவியம் (3) மையத் தொலைத்தகவு (4) நேரகலம் இவற்றைக் காண்க.

சமன்பாடு : $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

இது $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ என்ற உருவத்தில் உள்ளது. ஆகையால், நெட்டச்சு y-அச்சுடன் ஒன்றுகிறது. மையம் ஆதியில் உள்ளது.

$$a=3,\quad b=2$$

$$b^2=a^2\ (1-e^2)$$

அல்லது $4=9\ (1-e^2)$

(அ-து.) $1-e^2=\frac{4}{9}$

(அ-து.) $e^2=\frac{5}{9}$, (அ-து.) $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

குவியம் $S \to (0, ae)$ அதாவது $(0, \sqrt{5})$

குவியம் S', $(0, -\sqrt{5})$ ஆகும்.

நேரகலம் $= \dfrac{2b^2}{a} = 2 \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{3}$.

மாதிரி 5

$x - y + 1 = 0$ என்ற கோட்டை இயக்குவரையாகவும் $S(-1, -1)$ என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும், மையத் தொலைத் தகவை 2 ஆகவும் கொண்ட அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$P(x, y)$ என்ற ஏதாவது ஒரு புள்ளியை அதிபரவளைவின்மீது எடுத்துக்கொள்வோம் PM-ஐ இயக்குவரைக்குச் செங்குத்தாக வரைக. அப்படியாயின் $SP^2 = e^2 PM^2 = 4PM^2$. ஆனால்

$$PM = \frac{x - y + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}$$

$$SP^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2$$

ஆகவே அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4\frac{(x - y + 1)^2}{(\sqrt{2})^2}$$

அல்லது $x^2 + y^2 - 4xy + 2x - 6y = 0$.

மாதிரி 6

$4x^2 - 9y^2 = 63$ குறிக்கும் அதிபரவளைவின் அச்சுகளின் நீளங்கள், குவியம், மையத் தொலைத்தகவு, நேரகலம் ஆகியவற்றைக் காண்க.

சமன்பாட்டை $\dfrac{x^2}{63/4} - \dfrac{y^2}{7} = 1$ என்று எழுதக் கிடைப்பதாவது :

(i) $a^2 = \frac{63}{4}$, $b^2 = 7$, $a = \frac{1}{2}\sqrt{63}$, $b = \sqrt{7}$. $\sqrt{63}$

(ii) $b^2 = a^2 (e^2 - 1)$ என்பதிலிருந்து $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$ எனக் கிடைக்கின்றது.

(iii) நேரகலம் $= \frac{2b^2}{a} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

(iv) குவியம் $S\ (ae, 0) = \left(\frac{\sqrt{91}}{2}, 0\right)$

குவியம் $S'\ (-ae, 0) = \left(-\frac{\sqrt{91}}{2}, 0\right)$

பயிற்சி 5 - 1.

(1) $(-1, -1)$ என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும் $2x - 3y + 6 = 0$ என்ற கோட்டை இயக்குவரையாகவும் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

(2) $(2, -3)$, $x + 2 = 0$ என்பவற்றைக் குவியம் இயக்குவரையாகக் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

(3) கீழ்க்கண்ட பரவளைவுகளின் (1) குவியம் (2) நேரகலம் (3) அச்சுமுனை (4) அச்சு (5) இயக்குவரை இவற்றைக் காண்க.

(i) $y^2 + 2y - 3x + 9 = 0$

(ii) $x^2 - 4x + 5y + 6 = 0.$

(4) ஒரு பரவளைவு ஆடியின் (reflector) அகலம் 12 செ.மீ. அதன் ஆழம் 4 செ.மீ. அதன் குவியத்தின் இடத்தைக் காண்க.

(5) $25x^2+16y^2=400$ என்ற நீள் வட்டத்தின் (1) குவியங்கள் (2) மையத்தொலைத்தகவு (3) அச்சுமுனைகள் (4) நேரகலம் இவற்றைக் காண்க. படம் வரைக.

(6) $(3, -1)$ என்ற புள்ளியைக் குவியமாகவும் $2x-y+16=0$ என்ற கோட்டை இயக்கு வரையாகவும், மையத் தொலைத்தகவு $=\frac{2}{3}$ ஆகவும் கொண்ட நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(7) கீழ்க்கண்ட நீள்வளையத்தின் அச்சுநீளங்கள், மையத் தொலைத்தகவு, குவியங்கள் இவற்றைக் காண்க;

$3x^2+4y^2+6x-8y-5=0$. படம் வரைக.

(8) $9x^2+4y^2+36x=0$ என்ற நீள்வட்டத்தின் மையம், அச்சுமுனைகள், குவியங்கள் இவற்றைக் காண்க. படம் வரைக.

(9) $4y^2=x^2-1$ என்ற அதிபரவளைவின் மையம், அச்சுமுனைகள், குவியங்கள் மையத் தொலைத்தகவு, இயக்குவரைகள் இவற்றைக் காண்க. படம் வரைக.

(10) ஆதியைக் குவியமாயும், $x+y+1=0$ என்ற கோட்டை இயக்குவரையாகவும், மையத் தொலைத்தகவு $=\sqrt{2}$ எனவும் கொண்ட அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

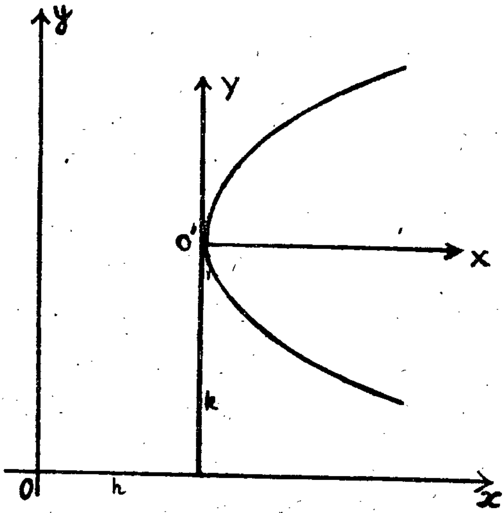
(11) $(2, 2)$ என்ற குவியத்தையும் $3x-4y=10$ என்ற இயக்குவரையையும், மையத் தொலைத்தகவு $=3$ எனவும் கொண்ட அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

(12) $\frac{(y+1)^2}{4}-(x+3)^2=1$ என்ற அதிபரவளைவின் மையத்தையும் அச்சுமுனைகளையும் காண்க.

அச்சுகளின் இடப்பெயர்ச்சியால் கூம்பு வளைவுகளின் சமன்பாடுகளை நியமமான வடிவில் சுருக்குதல்
(Reduction of the equations of the conics to the standard forms by translation of axes.)

கூம்பு வளைவுகளின் சமன்பாடுகள் இருபடிச் சமன்பாடானவை என்பதை அறிவோம். அவைகள் பொதுவாக நியமமானவையாக இராது. அவைகளில் சிலவற்றை அச்சுகளின் இடப் பெயர்ச்சியால் நியமமானதாகச் சுருக்கலாம்.

(1) எடுத்துக்காட்டாக, சமன்பாடு $(y-k)^2=4a\,(x-h)$ ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கின்றது. இப்பரவளைவின் அச்சுமுனை $O'\,(h, k)$ என்ற புள்ளியாகும் (படம் 5.6.); OX, பரவளைவின் அச்சாகும்.



படம் 5 – 6

இது X அச்சுக்கு இணையாக உள்ளது. ஆகவே, ஆயத் தொலை அச்சுகளைத் தங்களுக்கு இணையாகவே இருக்குமாறு நகர்த்தி ஆதியை O'–க்கு மாற்றினால் பரவளைவின் சமன்பாடு $Y^2=4aX$ என்றாகிறது. இதில் X, Y என்பன, புள்ளிகளின் புதிய அச்சுகளாகிய $O'X$, $O'Y$ ஐப் பொறுத்த ஆயத் தொலைகளாகும்.

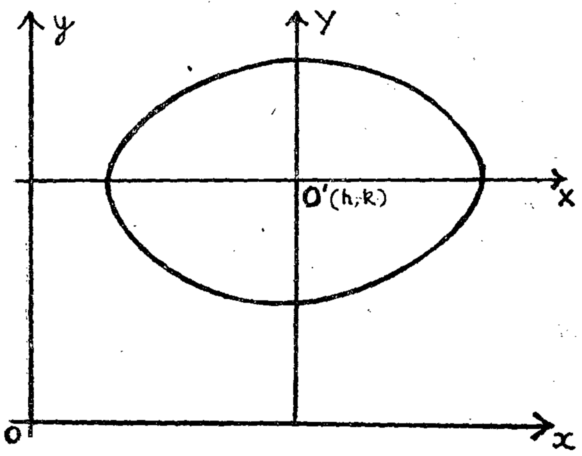
மாதிரி :

சமன்பாடு $(y+1)^2 = 8\ (x-2)$ குறிக்கும் பரவளைவின் அச்சு முனை (2, −1) ஆகும். இதன் நேரகலம் 2 ஆகும்.

(2) ஒரு நீள்வட்டத்தின் மையம் $O'(h, k)$ என்றும், அதன் நெட்டச்சு, x-அச்சுக்கு இணையானது என்றும் இருந்தால் நீள்வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-h)}{a^2} + \frac{(y-k]^2}{b^2} = 1$$

என்றிருக்கும் (படம் 5-7).



படம் 5-7

மாதிரி

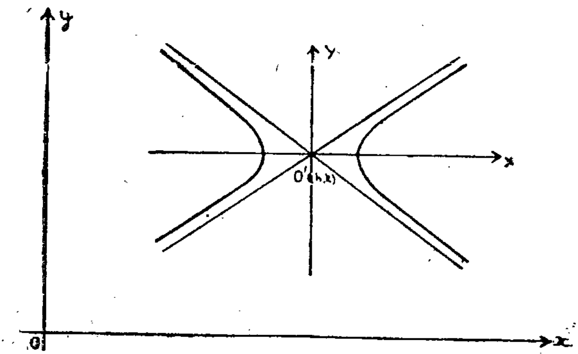
சமன்பாடு $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1,$

ஒரு நீள்வட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. இதன் அச்சுகள், ஆயத்தொலை அச்சுகளுக்கு இணையானவை. இதன் மையம் (1, 2) ஆகும்.

(3) ஓர் அதிபரவளைவின் மையம், $O'(h, k)$ என்றும், அதன் குறுக்கச்சு, x அச்சுக்கு இணையானது என்றும் இருந்தால் அதிபர வளைவின் சமன்பாடு,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

என்றிருக்கும் (படம் 5 · 8).



படம் 5 - 8

மாதிரி

சமன்பாடு $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1$, ஓர் அதிபர வளைவைக் குறிக்கின்றது. இதன் அச்சுகள், ஆயத் தொலை அச்சுகளுக்கு இணையானவை. இதன் மையம், $(-2, 1)$ ஆகும்

மாதிரி

$9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$ என்ற நீள் வட்டத்தின் (1) அச்சுகளின் நீளங்கள் (2) மையம் (3) மையத் தொலைத்தகவு (4) குவியங்கள் (5) இயக்குவரைகள் (6) நேரகலம் இவற்றைக் காண்க. படத்தையும் வரைக.

சமன்பாடு : $9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 4y) = 116$

அல்லது $9[(x-1)^2 - 1] + 25[(y-2)^2 - 4] = 116$

(அ-து.) $9(x-1)^2 + 25(y-2)^2 = 116 + 9 + 100$
$= 225$

(அ-து.) $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

∴ மையம் (1, 2) எனக் கிடைக்கிறது.

அச்சுகளின் அரை நீளங்கள் :

$$a = 5, \; b = 3$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2)$$

(அ-து.) $9 = 25(1 - e^2)$

(அ-து.) $1 - e^2 = \dfrac{9}{25}$

(அ-து.) $e^2 = \dfrac{16}{25}$

(அ-து.) $e = \dfrac{4}{5}$

குவியம் S : $(1 + ae, 2)$

(அ-து.) $(5, 2)$

குவியம் S' : $(1 - ae, 2)$

(அ-து.) $(-3, 2)$

அரை நேரகலம் $= \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{9}{5}$

இயக்குவரை XM: $x = 1 + \frac{a}{e} = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$

இயக்குவரை $X'M'$: $x = 1 - \frac{a}{e} = 1 - \frac{25}{4} = -\frac{21}{4}$

தொடுகோடு (Tangent), செங்கோடு (Normal) ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் :

1 (a) பரவளைவின்மேல் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடு காணல்.

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வுவிகிதம் $= (x_1, y_1)$ இடத்து வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்பு எனத் தெரியும்.

$$y^2 = 4ax$$

$$\therefore\ 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

அல்லது, $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

(x_1, y_1) இடத்தில் $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y_1}$

தொடுகோடு (x_1, y_1) வழி செல்வதால் அதன் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1)$$

அல்லது, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$

அல்லது, $yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$

ஏனெனின் $y_1^2 = 4ax_1$

(அ - து.) $yy_1 - 2ax - 2ax_1 = 0$

(அ - து.) $yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$

(அ - து.) $T = 0.$

செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -\dfrac{y_1}{2a}$.

∴ செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

(*b*) *பரவளைவின் சமன்பாட்டை, மாறு ராசி உருவத்தில் கூறல்* (Parametric form)

பரவளைவின் சமன்பாடு : $y^2 = 4ax$

x, y-யின் இந்த இணைப்பைக் கீழ்க்கண்ட விதம் ஒரு மாறு ராசி t-யின் சார்பாகக் கூறலாம் :

$$x = at^2,\quad y = 2at.$$

இவற்றிலிருந்து 't'-ஐ விலக்க

$$y^2 = 4a^2t^2 = 4a.at^2 = 4ax$$

எனக் கிடைப்பதைப் பார்க்கலாம். இந்த முறையில், வளைவையின்மேல் உள்ள புள்ளியை 't' என்றே குறிப்பது வழக்கம்.

(*c*) *பரவளைவின்மேல் உள்ள 't' இடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்*

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு : $T = 0$

அதாவது, $yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$

$x_1 = at^2,\ y_1 = 2\,at$ எனப் பிரதியிட, 't' இடத்துத தொடு கோடு :

$$y.\,2at - 2\,a\,(x + a\,t_1^2) = 0$$

அல்லது $y\,t - x - a\,t_1^2 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

(x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு :

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

t இடத்துச் செங்கோடு :

$$y - 2\,a\,t = -\frac{2\,a\,t}{2\,a}(x - at^2)$$

$$= -t\,x + at^3$$

அதாவது, $y + t\,x = 2\,at + at^3$

2 (a) நீள்வட்டத்தின் மேல் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள்

(i) (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோட்டின் சாயவு விகிதம்

= (x_1, y_1) இடத்து வகைக்கெழு.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

அல்லது $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y}{b^2}\dfrac{dy}{dx} = 0$

அல்லது $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$

(x_1, y_1) இடத்து $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_1}{y_1}$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - y_1 = - \frac{b^2}{a^2} \frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

அல்லது, $\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = - \frac{xx_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$

அல்லது, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$

அல்லது, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$

(அ — து.) $T = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

(ii) செங்கோட்டின் சாயவு விகிதம் $= \frac{a^2}{b^2} \frac{y_1}{x_1}$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

அல்லது, $a^2 \frac{(x - x_1)}{x_1} = \frac{b^2 (y - y_1)}{y_1}$

அல்லது, $\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2$

எனக் கிடைக்கிறது.

(b) *நீள்வட்டத்தின் மாறுராசி உருவம்*

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் மாறுராசி சமன்பாடுகள் $x = a \cos\theta$, $y = b \sin\theta$ எனக் கூறலாம் ஏனெனில், இவற்றிலிருந்து மாறுராசி θ ஐ விலக்க,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$ எனக் கிடைக்கிறது.

நீள்வட்டத்தின் மேல் உள்ள புள்ளியை 'θ' எனக் கூறுவது வழக்கம்.

(c) 'θ' இடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடு காணல்

(i) (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

'θ' இடதது்த் தொடுகோட்டை அடைய

$x_1 = a\cos\theta,\ y_1 = b\sin\theta$ எனப் பிரதியிடுவோம்.

சமன்பாடு : $$\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$$

எனக் கிடைக்கிறது.

(ii) (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு :

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$$

'θ' அதாவது $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$\frac{a^2x}{a\cos\theta} - \frac{b^2y}{b\sin\theta} = a^2 - b^2$$

அல்லது, $$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$$ எனக் கிடைக்கிறது.

3 (a) அதிபரவளைவின் மேல் (x_1, y_1) இடத்துத் தொடு கோடு, செங்கோடு ஆகியற்றின் சமன்பாடுகள்

(i) $(x_1\ y_1)$ இடத்துத் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= (x_1, y_1)$ இடத்து வகைக்கெழு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

அல்லது $$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

அல்லது $$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

(x_1, y_1) இடத்து $$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$$

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோடு :

$$y - y_1 = \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

அல்லது, $$\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{xx_1}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2}$$

அல்லது $$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

அல்லது, $$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$$

(அ-து.) $T = 0.$

(ii) செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{-a^2 y_1}{b^2 x_1}$

(x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - y_1 = \frac{-a^2}{b^2}\frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$$

அல்லது, $$\frac{b^2 y}{y_1} - b^2 = -\frac{a^2 x}{x_1} + a^2$$

அல்லது, $$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2$$

(b) அதிபரவளைவின் மாறுராசி உருவம்

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாட்டின் மாறுராசி சமன்பாடுகள் $x = a \sec\theta$, $y = b \tan\theta$ எனக் கூறலாம். ஏனெனில், இவற்றிலிருந்து மாறுராசி θ ஐ விலக்க,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

எனக் கிடைக்கிறது. அதிபரவளைவின் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியை 'θ' எனக் குறிப்பதுண்டு.

'θ' இடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் காணல் :

(i) (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

θ அதாவது $(a \sec\theta, b \tan\theta)$ இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$\frac{x \sec\theta}{a} - \frac{y \tan\theta}{b} = 1$$

(ii) (x_1, y_1) இடத்துச் செங்கோடு :

$$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2+b^2$$

'θ' இடத்துச் செங்கோடு :

$$\frac{a^2x}{a\ \sec\theta} + \frac{b^2y}{b\ \tan\theta} = a^2+b^2$$

அல்லது, $$\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2+b^2$$

மாதிரி 1

$y^2 = 4x$ என்ற பரவளைவுக்கு, $4y—x+3=0$ என்ற கோட்டுக்கு (i) மாறுராசி சமன்பாடுகள் (ii) செங்குத்தாக உள்ள தொடுகோட்டின் சமன்பாடுகள் காணவும். இவை தொடும் புள்ளிகள் இடத்துச் செங்கோடுகளின் சமன்பாடுகள் காணவும்.

(x_1, y_1) இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$yy_1—2a(x+x_1) = 0$$

இங்கு $yy_1-2(x+x_1)=0$

இதன் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{2}{y_1}$

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \frac{1}{4}$. தொடுகோடு இதற்கு இணையாக இருப்பின், அவற்றின் சாய்வு விகிதங்கள் சமம்.

அதாவது $\dfrac{2}{y_1} = \dfrac{1}{4}$ அல்லது $y_1 = 8$

$y_1{}^2 = 4x_1$ என்பதால், $x_1 = \dfrac{64}{4} = 16.$

∴ இணையான தொடுகோடு (16, 8) என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது.

இத்தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$8y-2(x+16) = 0$ அதாவது $-2x+8y-32=0$

அல்லது, $x - 4y + 16 = 0$

தொடுகோடு, நேர்கோட்டுக்குச் செங்குத்தானால்,

$$\frac{2}{y_1} = -4 \text{ என இருத்தல் வேண்டும்.}$$

அதாவது $y_1 = -\frac{1}{2}$

$y_1{}^2 = 4x_1$

$\therefore\ \frac{1}{4} = 4x_1$ (அ-து.) $x_1 = \frac{1}{16}$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு:

$$yy_1 - 2\ (x+x_1) = 0$$

அதாவது $y\ (-\frac{1}{2}) - 2\ (x+\frac{1}{16}) = 0$

(அ-து.) $-\frac{y}{2} - 2x - \frac{1}{8} = 0$

(அ-து.) $4y + 16x + 1 = 0$

முதல் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (16, 8).

இப்புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு :

$$y-8 = -4\ (x-16)$$

அல்லது $4x+y-72=0$

இரண்டாம் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(\frac{1}{16}, -\frac{1}{2})$.

இப்புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு :

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ (x - \frac{1}{16})$$

அல்லது $\frac{2y+1}{2} = \frac{16x-1}{64}$

அல்லது $64y+32=16x-1$

அல்லது $16x-64y-33=0$

மாதிரி 2

$y^2=12x$ என்ற பரவளைவின் நேரகலத்தின் முனைகளிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு, ஆகியவற்றின் சமனபாடுகளைக் காண்க.

நேர் அகலத்தின் முனைகளின் ஆயத்தொலைகள் $(a, 2a)$, $(a, -2a)$ என்பவைகளாகும்.

இங்கு $4a=12$. $\therefore$ $a=3$.

$\therefore$ முனைகள் $(3, 6)$, $(3, -6)$.

$$y^2=12x$$

$$\text{தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம்} = \frac{dy}{dx} = \frac{12}{2y} = \frac{6}{y}$$

$(3, 6)$-ல் உள்ள தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \dfrac{6}{6} = 1$

$(3, 6)$-ல் உள்ள செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -1$

$\therefore$ தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$y-6=(x-3)$$

அல்லது $x-y+3=0$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y-6=-(x-3)=-x+3$$

அல்லது $x+y-9=0$.

$(3, -6)$ என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சாய்வுவிகிதம்

$$=\frac{6}{-6}=-1,$$

செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= 1$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$y + 6 = -(x - 3)$$

அல்லது $x + y + 3 = 0$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y + 6 = (x - 3)$$

அல்லது $x - y - 9 = 0$

மாதிரி 3

$9x^2 + 4y^2 = 20$ என்ற நீள்வட்டத்தின்மேல் $\left(\frac{-4}{3}, 1\right)$ என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$9x^2 + 4y^2 = 20$$

அல்லது $18x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$

அல்லது $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}\frac{x}{y}$

$\left(\frac{-4}{3}, 1\right)$ என்ற புள்ளியில், $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4} \times \frac{-\frac{4}{3}}{1} = 3$

∴ இங்குத் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= 3$

செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -\frac{1}{3}$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - 1 = 3\left(x + \tfrac{4}{3}\right) = 3x + 4$$

அல்லது $3x-y+5=0$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y-1=-\tfrac{1}{3}\left(x+\tfrac{4}{3}\right)$$

அல்லது $3y-3=-x-\frac{4}{3}$

அல்லது $3x+9y-5=0.$

மாதிரி 4

$4x^2-9y^2=7$ என்ற அதிபரவளைவின், $8x-9y+18=0$ என்ற நேர்கோட்டுக்கு இணையான தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$4x^2-9y^2=7$$

அல்லது, $8x-18y\dfrac{dy}{dx}=0$

அல்லது, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4x}{9y}$

$\therefore$ (x_1, y_1) இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு விகிதம் $=\dfrac{4x_1}{9y_1}$

$8x-9y+18=0$ என்ற நேர்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $=\dfrac{8}{9}$

தொடுகோடு, இக்கோட்டிற்கு இணையாக இருப்பின்,

$$\frac{4x_1}{9y_1}=\frac{8}{9}$$

அல்லது, $x_1=2y_1$ எனக் கிடைக்கிறது. இதை $4x^2-9y^2=7$ என்ற அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டில் பிரதியிடு.

$$16y_1^2 - 9y_1^2 = 7$$

அல்லது $7y_1^2 = 7$

அல்லது $y_1^2 = 1$

அல்லது $y_1 = \pm 1$

$\therefore \quad x_1 = \pm 2$

$\therefore$ (2, 1), (— 2, —1) என்ற புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள், கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டுக்கு இணையானவை.

(2, 1) என்ற இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு:

$$y - 1 = \tfrac{8}{9}(x - 2)$$

அல்லது, $8x - 9y - 7 = 0$

(— 2, — 1) என்ற இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y + 1 = \tfrac{8}{9}(x + 2)$$

அல்லது, $8x - 9y + 7 = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 5 - 2

(1) கீழ்க்கண்ட பரவளைவுகளுக்கு, கொடுககப்பட்ட புள்ளி களிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க :

(a) $x^2 = 8(y - 2)$, நேரகல முனைகளில்

(b) $y^2 = ax$, நேரகல முனைகளில்

(c) $x^2 = 4ay$, (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில்.

(2) ஒரு பரவளைவில், நேரகல முனைகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் இயக்குவரையில் செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன எனக் காட்டு.

(3) $y=mx+\dfrac{a}{m}$ என்ற நேர்கோடு, m-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும், $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவைத் தொடுகிறது எனக் காட்டுக. தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

(4) $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவின்மேல் $t=1$, $t=-1$ என்ற புள்ளிகளிடத்து வரையப்படும் செங்கோடுகள் $(3a, 0)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்கின்றன எனக் காட்டுக.

(5) ஒரு புள்ளியிலிருந்து, ஒரு பரவளைவுக்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரையமுடியும் எனக் காட்டுக.

(6) $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவின் மேலுள்ள t_1, t_2 என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு காண்க. இதிலிருந்து, t-இடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

(7) கீழ்க்கண்ட நீள்வட்டங்களுக்கு, கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க :

(a) $9x^2+4y^2=20$; $(-\frac{4}{3}, 1)$

(b) $9x^2+16y^2=144$; நேரகல முனைகளில்.

(8) $c^2=a^2m^2+b^2$ என இருந்தால், $y=mx+c$ என்ற நேர்கோடு, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தைத் தொடும் என்பதைக் காண்பி.

(9) $16x^2-36y^2=596$ என்ற அதிபரவளைவின் $(6\sqrt{2}, 4)$ என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க.

(10) $c^2 = a^2 m^2 - b^2$ என இருந்தால், $y = mx + c$ என்ற நேர்கோடு, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவைத் தொடும் எனக் காண்பி.

(11) $3x^2 - 4y^2 = 15$ என்ற அதிபரவளைவினது, $y = 2x$ என்ற நேர்கோட்டுக்கு இணையாயுள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க. அவை தொடும் புள்ளிகளைக் காண்க.

பகுதி C

விடைகள்

பயிற்சி 1-1.

(1) $\sqrt{\frac{17}{2}}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{\frac{10}{2}}$

(5) $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

பயிற்சி 1-2.

(1) (i) $\frac{1}{2}$ சதுர அலகு (ii) $\frac{1}{2}$ சதுர அலகு (iii) $2\sqrt{3\,a^2}$

சதுர அலகுகள் (6) $\left(6, \frac{22}{3}\right)$ (7) $(4, -13)$

பயிற்சி 1-3.

(1) $y^2 - 2x^2 + 1 = 3x^2$ (2) $x - y + 6 = 0$

(3) $3x^2 + 3y^2 - 4x - 14y + 15 = 0$

(4) $x^2 = 3y^2$

(5) (i) $x^2 + y^2 =$ மாறிலி (ii) $x =$ மாறிலி

(iii) $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ மாறிலி

(iv) $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$ மாறிலி

பயிற்சி 2-1.

(1) $2y = \sqrt{3}\,x + 4$ (2) $x - y = 5$

(3) $y + 5 = 0$ (4) $x = 4\sqrt{3}$

(5) $2x - 3y + 5 = 0$ (6) $9x - 16y + 12 = 0$

(7) $x + y = 9$ (8) $x + \sqrt{3}\,y = 10$

(9) $\sqrt{3}\,x + y = 14$

பயிற்சி 2-2.

(i) $-\dfrac{11}{\sqrt{58}}$ (2) (i) $\left(\dfrac{26}{5}, -\dfrac{9}{5}\right)$ (ii) $(3, 4)$

(4) 10 (5) 11 : 21 (6) $2x + 5y - 1 = 0$

(8) (i) $9x - 7y - 2 = 0$ (ii) $17x - 17x - 8 = 0$

(9) (a) $(-4, 3)$ (b) புள்ளிகள் ஒரு கோட்டிலமைதலால் செங்கோட்டு மையம் இல்லை. (10) $\left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{14}{5}\right)$

(11) $3x + 2y = 3\frac{2}{3}$ (13) $3x - 2y - 1 = 0$,

$x + y = 3$, $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$

(14) $6y = x + 4$ (15) $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

பயிற்சி 3-1.

(1) (a) $\tan^{-1}\left(\pm \frac{1}{4}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\pm\sqrt{\dfrac{17}{6}}\right)$

(c) 90° (d) $\tan^{-1}\left(\pm \dfrac{b}{a}\right)$

(2) $a = 2$ (3) $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$; 0

பயிற்சி 4-1.

(1) $x - 2y = 5$

(2) $3x - 4y = 0$, தொடும் புள்ளி $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$

$3x - 4y + 10 = 0$, தொடும் புள்ளி $(\frac{2}{5}, \frac{14}{5})$

(3) (i) $a^2(1 + m^2) = c^2$ (ii) $(l^2 + m^2)a^2 = n^2$

(4) $(lg + mf - n)^2 = (g^2 + f^2 - c)(l^2 + m^2)$

(5) $5x^2 + 12xy + 16x - 24y - 52 = 0$

(6) $18x^2 - \frac{93}{4}y^2 - 13xy - 134x - 54y + 147 = 0$

(8) $x^2 + y^2 = 2a^2$

பயிற்சி 4-2.

(2) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$

பயிற்சி 5-1.

(1) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x + 62y - 10 \quad 0$

(2) $y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

(3) (i) குவியங்கள் $(\frac{41}{12}, -1)$; அச்சுமுனை $(\frac{8}{3}, -1)$;

அச்சு $y = -1$; இயக்குவரை : $12x = 23$

(ii) குவியம் $(2, -\frac{33}{20})$; அச்சுமுனை $(2, -\frac{2}{3})$,

அச்சு : $x = 2$; இயக்குவரை : $20y = 17$

(4) $a = \frac{9}{4}$ (5) குவியங்கள் (3, 0), (− 3, 0);

$e = \frac{3}{4}$; அச்சு முனைகள் (4, 0), (− 4, 0);

நேரகலம் = $\frac{25}{2}$

(6) $29x^2 + 61y^2 + 16xy + 218y - 294x - 574 = 0$

(7) குவியங்கள் (2, − 1), (0, − 1);

அச்சுகளின் நீளங்கள் : $4, 2\sqrt{3}$; $e = \frac{1}{2}$

(8) மையம் (− 2, 0) ; குவியங்கள் $(-2, \sqrt{5})$,

$(-2, -\sqrt{5})$; அச்சு முனைகள் (−2, 3),(−2, −3)

(9) $e = \sqrt{\frac{5}{2}}$; மையம் (0, 0) ;

அச்சு முனைகள் : (1, 0), (− 1, 0);

குவியங்கள் $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right), \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$

(11) $56x^2 + 119y^2 - 216xy + 820y - 440x + 700 = 0$

பயிற்சி 5-2.

(1) (a) தொடுவரை : $x + y - 2 = 0$; செங்கோடு : $x + 2y = 0$ — (− 4, 2) இடத்து.

தொடுவரை : $x - y + 2 = 0$; செங்கோடு : $x + 2y = 8$ — (4, 2) இடத்து.

(b) தொடுவரை : $4(y-x) = a$
செங்கோடு : $4(y+x) = 3a$ $\Big\}\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{2}\right)$ இடத்து.

தொடுவரை : $4(x+y)+a=0$
செங்கோடு : $4(y-x)-3a=0$ $\Big\}\left(\frac{a}{4}, -\frac{a}{2}\right)$ இடத்து

(c) தொடுவரை : $xx_1 = 2a(y+y_1)$

செங்கோடு : $yx_1 + 2ax = 2ax_1 + x_1y_1$

(6 $y(t_1+t_2) = 2(x+at_1t^2)$

(7) (a) தொடுவரை : $3x-y+5=0$

செங்கோடு : $9y+3x=5$

(b) தொடுவரை, $\pm\sqrt{7}x \pm 4y = 16$

செங்கோடு : $y - \frac{4x}{\sqrt{7}} = \frac{25}{4}$; $\left(\sqrt{7}, \frac{9}{4}\right)$ இடத்து.

$y + \frac{4x}{\sqrt{7}} = \frac{7}{4}$; $\left(\sqrt{7}, -\frac{9}{4}\right)$ இடத்து

$y + \frac{4x}{\sqrt{7}} = -\frac{7}{4}$; $\left(-\sqrt{7}, \frac{9}{4}\right)$ இடத்து.

$y - \frac{4x}{\sqrt{7}} = -\frac{25}{4}$; $\left(-\sqrt{7}, -\frac{9}{4}\right)$ இடத்து.

(9) செங்கோடு : $2\sqrt{2}y + 3x = 26\sqrt{2}$

பகுதி D

அறிமுகம்

Isaac Newton (கி. பி. 1642-1727), Leibnitz (கி.பி. 1646-1716) என்ற மேதைகள் நுண்கணிதத்தை (Calculus) முதன் முதலாகத் துவக்கினார்கள். Barrow என்ற தனது ஆசிரியராலும், John Wallis என்பவரது ஆராய்ச்சியாலும் தூண்டப்பட்டு, தனது 23 ஆவது வயதில் Newton, நுண்கணித முறைகளை 1665ஆம் ஆண்டில் கண்டுபிடித்தார். இது கணித வரலாற்றில் மிகப் பெரிய சாதனையாகும். ஒரு வளைவரையின் தொடுவரை (tangent) வளைவு (curvature) முதலியவற்றைக் கணக்கிடும் முயற்சியில் நுணகணித முறைகளைக் கண்டுபிடித்தார்.

Leibnitz என்பவர் 1694ஆம் ஆண்டில் முதன்முதலாகச் சார்பு (function) என்ற கருத்தை உருவாக்கினார். இவர் ஒரு சார்பின வகைக் கெழுவை (derivative) $\frac{dy}{dx}$ என்ற குறியீட்டினால் குறித்தார். Newton, Leibnitz இவர்கள் ஒருவருக்கொருவர் தொடர்பில்லாமல், தனித்தனியாக வெவ்வேறு குறியீட்டு முறைகளில் நுண்கணிதத்தை ஆராய்ந்தார்கள். Leibnitz தனது கண்டுபிடிப்புகளை வெளியிடுவதற்குச் சுமார் 10 ஆண்டுகளுக்கு முன்பே Newton கண்டுபிடித்ததாகத் தெரிகிறது. ஆனால் Leibnitz-ன் குறியீடுகள், முறைகள், Newton-னின் முறைகளைவிடச் சிறந்தனவாயும், தற்காலத்தில்கூடப் பயன்படுவனவாயும் உள்ளன.

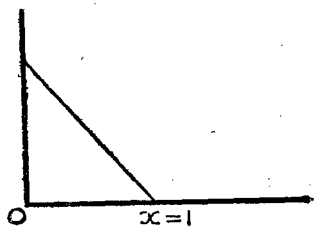
நுண்கணிதக் கணடுபிடிப்பு கணித வரலாற்றில் மிகப் பெரிய சாதனையாகும். கணிதத்தின் பல பகுதிகள் இம்முறையால் வளர்ச்சி அடைந்தன. விஞ்ஞான அறிவும் வேகமாக வளர்ச்சி அடையலாயிற்று. இங்கிலாந்து நாட்டில் Taylor (1685-1731), Maclaurin (1698-1746) போன்றவர்களும், ஐரோப்பாவில் Bernoulli, Euler, Lagrange, Canchy போன்ற பல மேதைகளும், 17, 18, 19-ம் நூற்றுண்டுகளில் நுண் கணிதத்தை வெகுவாக வளர்த்துள்ளார்கள்.

1. எல்லைகளும் தொடருடைத் தன்மையும்

(Limits and continuity)

1-1. சார்புகளும் (Functions) அவற்றின் வரைபடங்களும் (Graphs)

எண்களை மற்ற எண்களுடன இணைக்கும் சாதனத்தைச் சார்பு (function) எனக் கூறலாம். சார்பு என்ற சொல்லின் கருத்து சென்ற மூன்று நூற்றுண்டுகளில் மிகவும் மாறியுள்ளது. முதலில் y என்பது x-ன் ஒரு சார்பு எனக் கூறினுல், y, x-உடன் ஒரு கோவையால் இணைக்கப்படடுள்ளது எனப் பொருள்பட்டது. உதாரணமாக, $y = 3x + 2$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x^4 + 1}$ என்பவைகள் சார்புகள் எனக் கூறப்பட்டன. பிறகு, ஒரு சார்பு கீழ்க் கண்டதுபோல் கொடுக்கப்படலாயிற்று. உதாரணமாக $x = 0$ விலிருந்து $x = 1$ வரை $y = 1 - x$; $x > 1$ என இருக்கும் போது $y = 0$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் வரைபடம் படத்தில் உள்ளதுபோல இருக்கிறது. இவ்விதம் ஒரு சார்பு பல பகுதிகளாகக் கொடுக்கப்படுகிறது.

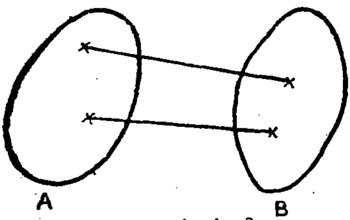


படம் 1-1.

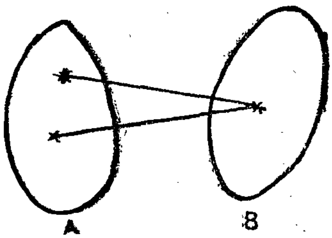
மற்ருேர் உதாரணத்தைக் கருதுவோம். $y = (x - 1)^2$ என்க. இதில் x என்ற ஏதேனுமோர் எண்ணை எடுக்கிறேம். இதிலிருந்து ஒன்றைக் கழித்து வரும் எண்ணை வர்க்கப்படுத்துகிறேம். y கிடைக்கிறது. $y = x^2 - 2x + 1$. இதில் x என்ற எண்ணை எடுத்து, அதை வர்க்கப் படுத்தி, அதைப்போல்இரண்டு மடங்கைக்கழித்துப் பிறகு ஒன்றைக் கூட்டுகிறேம். y கிடைக்கிறது. இரண்டு வகைகளிலும்

செயல்முறைகள் வெவ்வேறு. இரண்டிலும், x-ன் ஒரு மதிப்புக்கு y-ன் ஒரு மதிப்பு கிடைக்கிறது. உதாரணமாக, $x=4$ என எடுக்கும் போது, முதல் முறையில் $y=(4-1)^2=9$ எனவும், இரண்டாவது முறையில் $y=16-8+1=9$ என்ற அதே மதிப்பும் கிடைக்கிறது. இவ்விதமாக, ஒரு x-ன் மதிப்பை, ஒரு y-ன் மதிப்புடன் இணைப்பது சார்பு ஆகும்.

பொதுவாக, A, B இவை இரண்டு கணங்கள் (sets) என்க. A-யில் உள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் B-யில் உள்ள ஒரு பிரத்தியேகமான (unique) ஒரு பொருளுடன் இணைக்கும் ஒரு விதிக்கு (rule) சார்பு எனப் பெயர். இதை A-யிலிருந்து B-க்கு ஓர் உரு மாற்றம் (tansformation) அல்லது ஒரு வரைதல் (mapping) எனவும் கூறலாம். B-யில் உள்ள ஒரு பொருளுக்குத் தகுந்தாற் போல் A-யில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பொருள்கள் இருக்கலாம். இவற்றைப் படத்தில் பார்க்கலாம்.



படம் 1-2



படம் 1-3.

A-க்கு அரங்கம் (Domain) எனவும், B-க்கு வீச்செல்லை (Range) எனவும் பெயர். சார்புகளை f, g, h, F, G போன்ற எழுத்துகளால் குறிப்பது வழக்கம். ஒரு சார்பு கொடுக்கப்பட்டால் மூன்று பொருள்களைக் கருதவேண்டும். அதாவது அரங்கம், வீச்செல்லை, மற்றும் சார்பு. இதற்கான குறியீடு . $f: A \to B$. இதனால் A என்ற கணம், B என்ற கணத்துக்கு, f என்ற சார்பால் மாற்றம் செய்யப்படுகிறது என அறிகிறோம்.

மாதிரி 1-1

ஒரு வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் கணம் A என்க. வகுப்பறையிலுள்ள நாற்காலிகளின் கணம் B என்க. ஒவ்வொரு

மாணவரையும் ஒரு நாற்காலியில் அமர்த்தும் ஒரு நியதி, A-யை B-க்கு மாற்றம் செய்யும் ஒரு சார்பு எனப்படும். 'a' என்ற மாணவர் அமர்த்தப்படும் நாற்காலியை $f(a)$ எனக் கூறலாம். இவ்விதம் எல்லா மாணவர்களும் அமர்த்தப்பட்டால் $f: A \rightarrow B$ எனக் கூறலாம். ஒரு மாணவரேனும் அமாத்தப்படாமலிருந்தால், f ஐ, A-லிருந்து B-க்கு மாற்றும் சார்பு எனக் கூறமுடியாது.

மாதிரி 1-2

உலகத்திலுள்ள எல்லா நாடுகளின் கணம் X என்க. இந்த நாடுகளின் தலைநகரங்களின் கணம் Y என்க. ஒவ்வொரு நாட்டையும் அதன் தலைநகரால் குறிப்பிடும் ஒரு சார்பு g என்க. இப்பொழுது $g: X \rightarrow Y$ எனக் கூறலாம். இங்கு g-யின் அரங்கம், dom. g = எல்லா நாடுகளின் கணம்.

மாதிரி 1-3

ஒவ்வொரு மெய்யெண் x-ஐயும் தன்னுடனேயே இணைக்கும் ஒரு சார்பு f என்க. அதாவது, $f(x) = x$. இங்கு 'f' முற்றொருமைச் சார்பு (Identity function) எனப்படும்.

மாதிரி 1-4

R, மெய்யெண்களின் கணம் என்க. $f(x) = x^2$ என மாற்றம் செய்யும் சார்பு 'f'-ஐ $f: R \rightarrow R$ எனக் கூறலாம். ஏனெனின், x^2-ம் ஒரு மெய்யெண்.

மாதிரி 1-5

x ஒரு மெய்யெண் என்க. $g(x) = \sin x$ என்ற சார்பை $g: R \rightarrow R$ எனக் கூறலாம்.

மாதிரி 1-6

$$h: R \rightarrow R, \; h(x) = 1 + \frac{x}{\underline{|1}} + \frac{x^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \qquad x \rightarrow R$$

பயிற்சி 1 - 1

(1) கீழ்க் கண்டவற்றில் எவை சார்புகளாகும்? சார்புகளாக இருக்கும்பொழுது அவற்றின் அரங்கம் என்ன? வீச்செல்லை என்ன?

(i) X = எல்லா மெய்யெண்களின் கணம்.

Y = எல்லா மிகை மெய்யெண்களின் கணம் (set of positivs real numbers)

f என்பது $f(x) = x^2$ என வரையுறுக்கப்படுகிறது.

இங்கு $x \in X$ எனக் கொள்ளவும்.

(ii) $X = \{1, 2, 3, 4\}$; $Y = \{3, 4, 5, 6\}$

$f(x) = x + 2, \; x \in X$

(iii) X = எல்லா மெய்யெண்களின் கணம்.

$f(x) = \pm\sqrt{x}$, $(x \in X)$ என்ற சார்பு.

(iv) $f(x) = \pm\sqrt{x^2 - 9}$, $x \in R$ ($R \to$ மெய்யெண்களின் கணம்)

(v) $x \in R$ என்ற எந்த எண்ணையும் அதற்குச் சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ள மீபெரு முழு எண்ணுடன் இணைக்கும் சார்பு.

(2) $y^2 = x$ என்ற இணைப்பில், y-யை x-ன் சார்பாகக் கூற முடியுமா?

1-2 *சார்புகளின் இணைப்பு* (Composition of functions)

X, Y, Z இவை ஏதேனும் மூன்று கணங்கள் என்க. f, g என்ற சார்புகள், $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ என இருக்கட்டும். $g \circ f$ என்ற ஒரு புதிய சார்பு, கீழ்க்கண்டவாறு வரையறை செய்யப்பட்டும்.

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$. இப்பொழுது $(g \circ f) : X \to Z$ என ஆகிறது: அதாவது முதலில் f என்ற சார்பு X-ன் ஒரு பொருளை, y-ன் ஒரு பொருளாகவும், உடனே g என்ற சார்பு இப்பொருளை Z-ன் ஒரு பொருளாகவும் மாற்றிவிடுகிறது. இவ்விதம் $g \circ f$ என்ற இணைப்புச் சார்பு, X-ன் பொருள்களை Z-ன் பொருள்களாகவும் மாற்றம் செய்கிறது.

[$g \circ f$ என்பதை '*g circle f*' எனக் கூறவேண்டும்.]

மாதிரி 1-7

$X = Y = Z = R$ = மெய்யெண் கணம் என்க.

$f(x) = x + 4, \quad g(y) = y^3$ என்க.

$$g \circ f = g[f(x)] = g(x+4)$$
$$= (x+4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$f \circ g = f[g(x)] = f(x^3) = x^3 + 4$$

இவ்விதம் $g \circ f$ i $f \circ g$ என்ற சார்புகள் **கிடைக்கின்றன.** ஆனால், அவை வெவ்வேறானவை.

பயிற்சி 1 – 2

(1) $f(x) = x^2, \; g(y) = 4y + 1$ என்றால்
$(g \circ f)x, \; (f \circ g)(x)$ இவற்றைக் காண்க.

(2) $f(x) = x^3, \; g(y) = y, h(z) = 3z + 1$ என்றால்
(i) $(f \circ g \circ h)(o)$ (ii) $(f \circ h \circ g)(2)$ இவைகளைக் காணவும்.

(3) $f(x) = x^2 + 7, \quad g(y) = 3^Y$ என்றால் $(f \circ g)(x)$ என்பதைக் காணவும்.

1-3 எதிர்மறைச் சார்புகள் (Inverse functions)

வரையறை

$f : X \to Y$ என்க. B, Y-ன் ஓர் உட்கணம் என்க. X-ல் ஓர் உட்கணம் $A = \{x : f(x) \in B\}$, அதாவது $f(x)$ என்ற x–ன் பிம்பம் B-யைச் சார்ந்ததாக இருந்தால் A, B-யின் எதிர் பிம்பம் (Inverse image) எனப்படும். எதிர்மறைச்சார்பு f^{-1} எனக் குறிக்கப்படுகிறது. y-ன் ஒவ்வொரு பொருளையும், f^{-1}

என்ற எதிர்மறைச் சார்பு, X-ல் உள்ள ஒரு பிரத்தியேகப் பொது/ளுடன் இணைக்கும்.

மாதிரி 1-8

$f(x) = 2x - 1$ என்க.

$B = \{y : 1 < y < 3\}$ என்க.

இப்பொழுது $f^{-1}(B) = \{x : 1 < f(x) < 3\}$

$$= \{x : 1 < 2x - 1 < 3\}$$

$$= \{x : 2 < 2x < 4\}$$

$$= \{x : 1 < x < 2\}$$

மேலும்,

$y = 2$ என்க. $2x - 1 = 2$ அல்லது $x = \frac{3}{2}$

$\therefore \quad f^{-1}(2) = \frac{3}{2}$

பயிற்சி 1 - 3

(1) $f(x) = 2x - 7$ என்றால் $f^{-1}(0)$ யாது?

(2) $h(x) = (3x+1)^2$, $B = \{y : 0 < y < 1\}$ என்றால், $h^{-1}(B)$ யாது?

(3) $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}[g^{-1}(B)]$ என நிறுவுக.

1-4. வரைபடங்கள் (Graphs)

வரையறை

X, Y இவை, R என்ற மெய்யெண் கணத்தின் உட்கணங்கள் என்க $f : X \rightarrow y$ என்க.

$y = f(x)$ என உள்ள, (x, y) என்ற புள்ளிகளின் கணம் 'f'-ன் வரைபடம் எனலாம்.

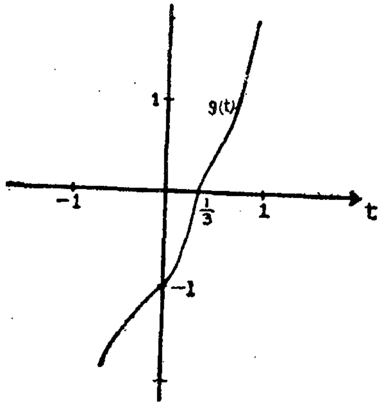
மாதிரி 1-9

$g(t) = 3t - 1$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக. சார்பின் அரங்கம், வீச்செல்லை யாவை?

அரங்கம் : R என்ற மெய்யெண் கணம்.

வீச்செல்லை : இதே R என்ற கணம்.

வரைபடம் படத்தில் குறிக்கப்பட்டுள்ளது.

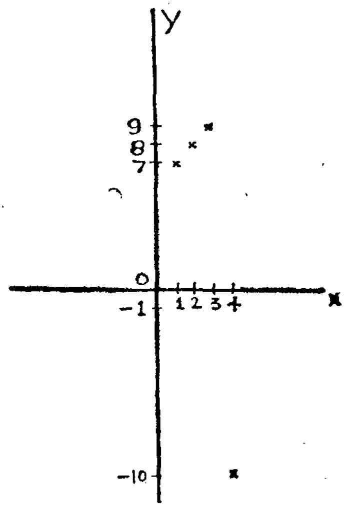


படம் 1 - 4

மாதிரி 1-10

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ என்பதை அரங்கமாகவும்,

$Y = \{7, 8, 9, -10\}$ என்பதை வீச்செல்லையாகவும் கொண்ட சார்பின் வரைபடம் வரைக.

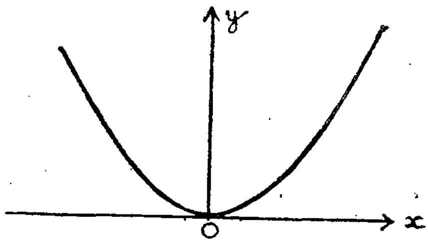


படம் 1 - 5

மாதிரி 1-11

$y = x^2$-ன் வரைபடம் வரைக.

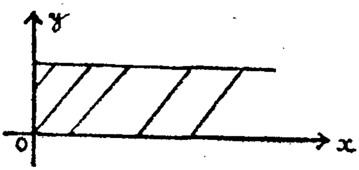
x	$y = x^2$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9



படம் 1-6.

மாதிரி 1-12.

R என்பதை அரங்கமாகவும்: $[0, 1]$ என்பதை வீச்செல்லை யாகவும் கொண்ட $y = f(x) = x - [x]$ என்ற சார்பின் வரை படம் வரைக.

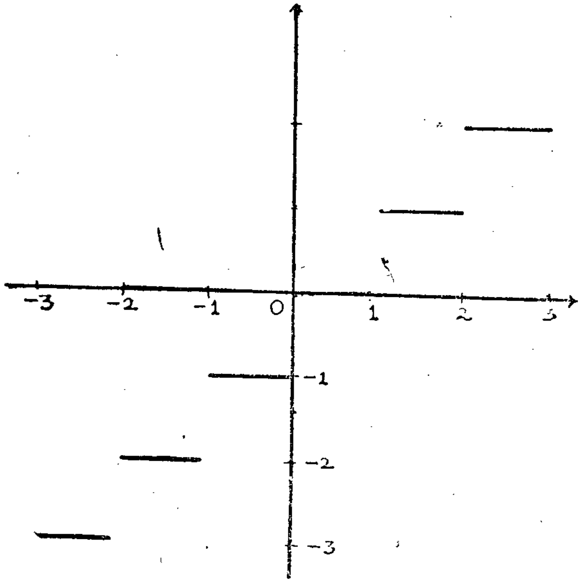


படம் 1·7.

மாதிரி 1-13

$y = [x]$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக. இந்தச் சார்பை படிச் சார்பு (Step function) என்று அழைக்கிறோம். n, $n + 1$ என்பவை அடுத்தடுத்த முழு எண்களைக் குறிக்குமானால்,

$$y = f[x] = n, \quad n \leq x < n + 1.$$



படம் 1-8.

பயிற்சி 1 - 4

கீழ்க் கண்ட சமன்பாடுகளால் கொடுக்கப்படும் சார்புகளின் வரைபடங்களை வரையவும்.

(i) $y = 3x + 2$ (ii) $y = 2x - 3$

(iii) $y = |x| =$ x-ன் எண் மதிப்பு

(iv) $y = \begin{cases} 2x - 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$

(v) $y = x^3 + 2x$ (vi) $y = \sin x$

(vii) $y = \tan x$

1·5 ஒரு புள்ளியின் அண்மை (Neighbourhood of a point)

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு மிகை எண் t-க்குத் தகுந்தாற்போல, p என்ற மெய்யெண் புள்ளியிலிருந்து தொலைவு t-க்குச் குறைவாக உள்ள புள்ளிகளின் கணம் p-ன் அண்மை எனப்படும். இதை $N_{p,\ t}$ எனக் குறிக்கலாம். இப்புள்ளிகள் p-யை மையமாகவும், t யை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்துக்குள் அடங்கும்.

$$N_{p,\ t} = \{x : |x - p| < t\}$$

அல்லது $N_{p,\ t} = \{x : p - t < x < p + t\}$ என இருப்பதையும் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

$$N_{3,\ \frac{1}{4}} = \{x : |x - 3| < \tfrac{1}{4}\}$$

$$= \{x : -\tfrac{1}{4} < x - 3 < \tfrac{1}{4}\}$$

$$= \{x : 2\tfrac{3}{4} < x < 3\tfrac{1}{4}\}$$

$$N_{2,\ \frac{1}{5}} = \{x : |x - 2| < \tfrac{1}{5}\}$$

$$= \{x : -\tfrac{1}{5} < x - 2 < \tfrac{1}{5}\}$$

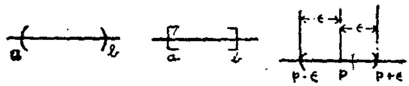
$$= \{x : 1\tfrac{4}{5} < x < 2\tfrac{1}{5}\}$$

வரையறை

$N_{p,\ t} = \{x : |x - p| < t\}$ ஓர் எண் p-யின் அண்மை கொடுக்கப்பட்டால், இந் அண்மையை, தகுந்த இரண்டு எண்கள் a, b சார்பாக $\{x : a < x < b\}$ என எழுதலாம் என்பதைப் பார்த்தோம்.

வரையறை

a, b என்பவை இரண்டு மெய்யெண்கள். $a < b$ என்க. $\{x : a < x < b\}$ என்ற எண் கணம் (a, b) என்ற ஒரு *திறந்த இடைவெளி* (open interval) எனப்படுகிறது. $\{x : a \leq x \leq b\}$ என்ற கணம் $[a, b]$ ஒரு *மூடிய இடைவெளி* (closed interval) எனப்படுகிறது. இந்த இரண்டு வகையிலும், a, b என்பவை இடைவெளியின் முனைகள் எனப்படுகின்றன. மேற்கூறியவற்றிலிருந்து, p-யின் அண்மை, p-யை மையமாகக் கொண்ட $p - t < x < p + t$ என்ற திறந்த வெளியாகிறது எனப் பார்க்கிறோம்.

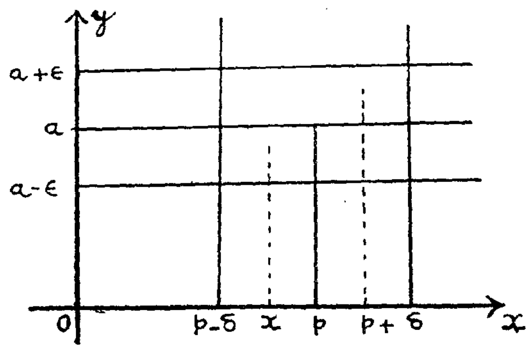


படம் 1-9. படம் 1-10. படம் 1-11.

1–6 எல்லை (Limit)

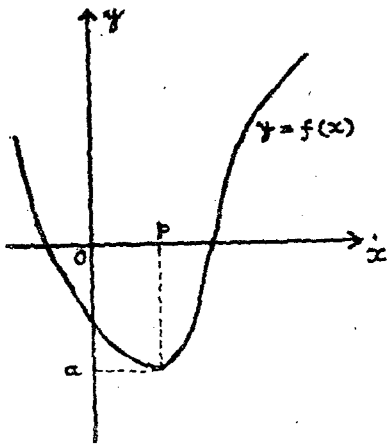
"எல்லை" என்பதற்கு வடிவ கணித முறையில் இரு விளக்கங்கள் கூறலாம்.

(i) 'p' என்ற புள்ளியில் 'f' என்ற சார்பின் எல்லை 'a' என்று கூறுவதன் பொருள் பின்வருமாறு: 'p'-க்கு அருகாமையிலுள்ள புள்ளிகள் f-ன் மூலம் 'a'-க்கு அருகில் செல்லும். அல்லது, p-க்கு அருகிலுள்ள புள்ளிகளின் பிம்பங்கள் a-க்கு அருகில் இருக்கும். (படம் 1–12. காண்க.)

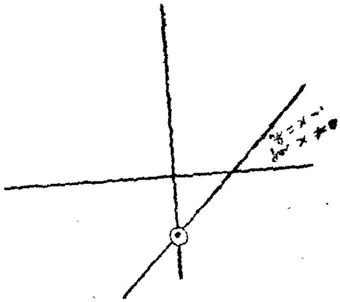


படம் 1 - 12.

(ii) f-ன் வரைபடத்திலுள்ள ஒரு பிளவை, (p, a) என்ற புள்ளியின் மூலம் அடைக்க முடியுமானால், p என்ற புள்ளியில் f-ன் எல்லை a என்று கூறுகிறோம். p என்ற புள்ளியில் f-க்கு ஓர் எல்லை இருப்பதற்கு f என்னும் சார்பு p என்னும் புள்ளியில் வரையறை செய்யப்படாமலிருந்தாலும் பரவாயில்லை.



படம் 1-13



படம் 1 - 14

வரையறை

$f(x)$ என்ற சார்பைக் கருதுக. x-ன் மதிப்பு p என்ற எண்ணை அணுகும்போது $f(x)$ ன் மதிப்பு a என்ற எண்ணை அணுகினால், a ஐ $f(x)$ ன் எல்லை எனக் கூறுகிறோம்

இது எல்லை $\underset{x \to p}{f(x)} = a$ அல்லது

$\underset{x \to p}{Lt} f(x) = a$ என எழுதப்படுகிறது.

மேலும் 'எல்லை' என்ற கருத்தைக் கீழ்க்கண்ட விதமும் வரையறுப்பதுண்டு.

வரையறை

t என்ற மிகை எண் எவ்வளவு சிறிதாக இருப்பினும் அதற்குத் தகுந்தாற்போல் $|x-p|<\delta$ ஆக இருக்கையில் $|f(x)-e|<t$ என இருக்குமாறு δ என்ற மிகை எண் காண இயலுமானால், e என்ற எல்லையை $f(x)$ நெருங்குகிறது எனக் கூறலாம்.

மாதிரி 1-14

$f(x)=5x-4$ என்ற சார்பு x, 2 என்ற மதிப்பைச் சாரும் போது, 6 என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது எனக் காண்பி.

இங்கு $e=2$, $p=6$.

$$|f(x)-e| = |5x-4-6|$$
$$= |5x-10|$$
$$= 5|x-2|.$$

$\delta = \dfrac{t}{5}$ என்க. $|x-2|<\delta$ என இருக்கும்போது,

$$|f(x)-6| < 5\ \frac{t}{5}$$

$< t$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\underset{x\to 2}{Lt}\ f(x)=6.$$

1-7 சார்புகளின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் இவைகளின் எல்லைகள்.

f, g என்பவை இரு சார்புகள் என்க.

$f+g,\ f-g,\ fg,\ \dfrac{f}{g}$ என்பவைகளைக் கீழ்க்கண்டவாறு வரையறுப்போம்.

(i) $(f\pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

(ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

தேற்றம் :

$\underset{x \to h}{Lt} f(x) = l$ மற்றும் $\underset{x \to h}{Lt}\, g(x) = m$ என்க.

கீழ்க்கண்ட முடிவுகள் உண்மைகள்.

(i) $\underset{x \to h}{Lt} (f \pm g)(x) = \underset{x \to h}{Lt} [f(x) \pm g(x)] = l \pm m$

(ii) $\underset{x \to h}{Lt} (f \cdot g)(x) = \underset{x \to h}{Lt} [f(x)\ g(x)] = lm$

(iii) $\underset{x \to h}{Lt} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \underset{x \to h}{Lt} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}$

மாதிரி 1-15

$\underset{x \to 1}{Lt} (x^2 + 2x + 1)$ என்பதைக் காண்க

$f(x) = x^2$ என்க, $g(x) = 2x + 1$ என்க.

$\underset{x \to 1}{Lt} f(x) = 1$, $\underset{x \to 1}{Lt} g(x) = \underset{x \to 1}{Lt} (2x + 1) =$

$2 + 1 = 3$

ஆகவே $\underset{x \to 1}{Lt} (x^2 + 2x + 1) = \underset{x \to 1}{Lt} [f(x) + g(x)]$

$= \underset{x \to 1}{Lt} f(x) + \underset{x \to 1}{Lt} g(x)$

$= 1 + 3 = 4.$

மாதிரி 1-16

$\underset{x \to -1}{Lt} \frac{x^2 + 3}{x + 2}$ என்பதைக் காண்க.

$f(x) = x^2 + 3$ என்க. $g(x) = x + 2$ என்க.

$$\underset{x \to -1}{Lt} (x^2 + 3) = 1 + 3 = 4; \quad \underset{x \to -1}{Lt}\ x + 2 = 1$$

$$\underset{x \to -1}{Lt} \frac{x^2 + 3}{x + 2} = \frac{\underset{x \to 1}{Lt}\ x^2 + 3}{\underset{x \to -1}{Lt}\ x + 2} = \frac{4}{1} = 4$$

பயிற்சி 1 - 5

கீழ்க்கண்ட எல்லைகளைக் காண்க :

(1) $\underset{x \to 4}{Lt} \dfrac{x^3 - 3x + 5}{x^2 + 2}$

(2) $\underset{x \to -2}{Lt} \dfrac{x^2 + 4}{x + 6}$

(3) $\underset{x \to 0}{Lt} \tan x$ (4) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} (\cot x)$

(5) $\underset{x \to 1}{Lt} (x^2 + 2x)(3x^3 - 1)$

(6) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{x^2 + 5x - 2}{2x}$

(7) $\underset{x \to 2}{Lt} (x^3 - 3x + 1)(x^4 + 1)$

(8) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \operatorname{cosec} x.$

1·8. இரண்டு முக்கிய எல்லைகள்

(a) $\underset{x \to a}{Lt} \dfrac{x^n - a}{x - a} = n a^{n-1},$

இதில் 'n' ஏதேனுமொரு விகிதமுறு (Rational) எண்.

நிருபணம் :

(i) n, ஒரு மிகை முழு எண் என்க.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots\ldots + a^{n-1}$$

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots\ldots + a^{n-1} \text{ (} n \text{ உறுப்புகள்)}$$

$$= n.a^{n-1}$$

(ii) n ஒரு மிகை பின்னம் $= \frac{p}{q}$.

இதில் p, q இவை மிகை முழு எண்கள்.

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{x^{\frac{p}{q}} - a^{\frac{p}{q}}}{x - a} = \frac{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p - \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q - \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q}$$

$x^{\frac{1}{q}} = y$ என்க ; $a^{\frac{1}{q}} = b$ என்க.

$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{y \to b}{Lt} \frac{y^p - b^p}{y^q - b^q}$$ என ஆகிறது.

$$= \underset{y \to b}{Lt} \left[\frac{y^p - b^p}{y - b} \div \frac{y^q - b^q}{y - b} \right]$$

$$= P.b^{p-1} \div q.b^{q-1} = \frac{p}{q}\, b^{p-q}$$

$$= \frac{p}{q} \cdot a^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} \cdot a^{\frac{p}{q}-1} = n \cdot a^{n-1}$$

(iii) $n =$ ஒரு குறை முழு எண் எனக. (அ-து.) $n = -m$. இதில் $m =$ ஒரு மிகை முழு எண்.

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{x-a} = \frac{x^{\frac{1}{m}} - a^{\frac{1}{m}}}{x-a}$$

$$= -\frac{1}{x^m \cdot a^m} \; \frac{x^m - a^m}{x-a}$$

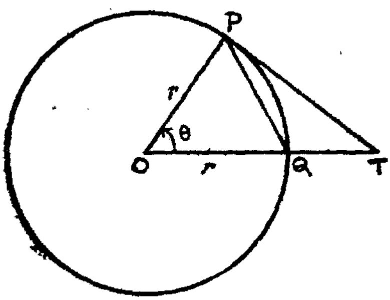
$$\underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x-a} = -a^{\frac{1}{2m}} \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^m - a^m}{x-a}$$

$$= -a^{\frac{1}{2m}} \cdot m.a^{m-1}$$

$$= -m\, a^{-m-1} = n\, a^{n-1}$$ எனக்

கிடைக்கிறது.

(b) $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ என நிறுவுக.



படம் 1 - 15.

O, வை மையமாகவும், ஆரம் $= r$ உள்ள வட்டத்தில் PQ ஒரு வில். $\angle QOP = \theta$ ஆரையன்கள் என்க. P இடத்துத் தொடுவரை OQ-வை T-ல் சந்திக்கட்டும்.

முக்கோணம் OQP-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

வட்டக்கோணப்பகுதி OQP-யின் பரபபு $= \frac{1}{2} r^2 \theta$

முக்கோணம் OTP-யின் பரப்பு $\frac{1}{2} r^2 \tan \theta$

படத்திலிருந்து

$$\frac{1}{2} r^2 \sin \theta < \frac{1}{2} r^2 \theta < \frac{1}{2} r^2 \tan \theta$$

எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது, $\sin \theta < \theta < \tan \theta$

அல்லது, $1 < \dfrac{\theta}{\sin \theta} < \dfrac{1}{\cos \theta}$

$\theta \to 0$ என்றால் $\dfrac{1}{\cos \theta} \to 1$ எனத் தெரியும்.

$$\therefore \quad \underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

அல்லது $\underset{\theta \to 0}{Lt} \dfrac{\sin \theta}{\theta} = 1$ எனக்கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 1 - 6

கீழ்க் கண்டவற்றின் மதிப்புக் காண்க

(1) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x}{x}$ (2) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$

(3) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin 3x}{3x \cos x}$ (எ) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos x}{x \sin x}$

(5) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$ (6) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{Lt} (\sec x - \tan x)$

1-9. சார்புகளின் தொடருடைத் தன்மை (continuity)

வரையறை

ஒரு சார்பின் வரைபடம் தொடர்ச்சியுடையதாக இருப்பின் அது தொடருடைச் சார்பு (Continuous function) எனவும், தொடர்பற்றதாக இருப்பின் அது தொடரில்லாச் சார்பு (dis-continuous function) எனவும் பெயர் பெறும். x-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்குச் சார்பின் தொடருடைத் தன்மை கீழ்க் கண்ட மூன்று கட்டுப்பாடுகளுக்கு உட்பட்டது:

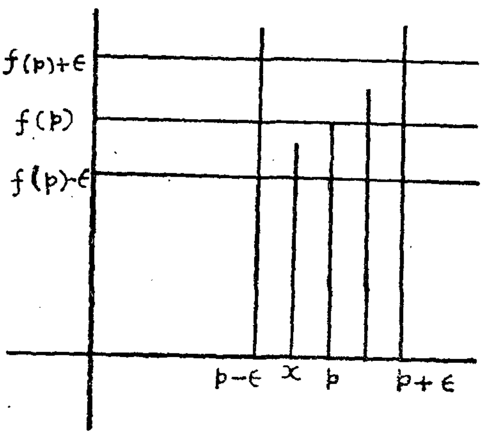
(1) $x = a$ என்ற இடத்தில் $f(a)$-யின் மதிப்பு ஒரு முடிவுள்ளதாக (finite) இருத்தல் வேண்டும்.

(2) a-க்கு அருகில் இரு பக்கங்களிலும் $f(x)$-க்கு மதிப்புகள் இருத்தல் வேண்டும்.

(3) இரு புறங்களிலிருந்தும் x, a-யை நெருங்கும்போது $f(x)$, $f(a)$-ஐ நெருங்க வேண்டும்.

அதாவது $\underset{x \to a}{Lt} \; f(x) = f(a)$.

தொடருடைத் தன்மைக்கு வடிவக் கணித முறையில் இரு விளக்கங்கள் உள்ளன. p என்ற புள்ளிக்கு அருகில் (close)



படம் 1-16.

f என்ற சார்பின் அரங்கத்திலுள்ள புள்ளிகள் f-ன் மூலம் $f(p)$-க்கு அருகில் சென்றால் f என்ற சார்பு p-யில் தொடருடையது. மேலும், f-யின் வரைபடத்தில் $(p, f(p))$ என்ற புள்ளியில் " பிளவு " (break) இல்லையேயானால் f என்ற சார்பு p-யில் தொடருடையது.

மாதிரி 1-17

(i) மாறிலிச் சார்புகள், தொடருடைத் தன்மையுடையவை:

(ii) $\sin x$, $\cos x$, x , (n மிகை முழு எண்) x–ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடருடையவைகள்.

(iii) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ என்ற சார்பு, $x = 0$ என்னுமிடத்துத் தொடரில்லாதது. ஏனெனில், இங்குச் சார்புக்கு மதிப்பு இல்லை.

(iv) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ என்ற இடங்களில்} \\ 1, & x \geq 0 \text{ என்ற இடங்களில்} \end{cases}$

என்று வரையறுக்கப்படும் சார்பு, $x = 0$ என்ற இடத்தில் தொடரில்லாதது. ஏனெனில் இங்கு $f(x)$-க்கு ஓர் எல்லை இல்லாமல் இருக்கிறது.

பயிற்சி 1 - 7

கீழ்க்கண்ட சார்புகள் ஒரு புள்ளியிடத்துத் தவிர மற்ற எல்லா இடங்களிலும் வரையறுக்கப்படுகிறது. அந்தப் புள்ளியில், சார்புக்கு எந்த மதிப்புக் கொடுத்தால் சார்பு தொடருடையதாக ஆகும்?

(1) $f(x) = 3x - 1$, $x \neq 0$ என்ற இடங்களில்.

[இங்கு $f(x) = -1$ எனக் கொண்டால், சார்பு தொடருடையதாக ஆகிறது.]

(2) $f(x) = 3 + x$, $x \neq 2$.

(3) $g(y) = y^2 - 2y, \quad y \neq 0.$

(4) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0.$

தேற்றம்

$f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்புகள் x_0 என்ற இடத்தில் தொடருடையதாக இருக்கட்டும். இப்பொழுது x_0 என்ற இடத்தில்

(a) $f(x) + g(x)$ தொடருடையது.

(b) $f(x) \cdot g(x)$ தொடருடையது.

(c) $g(x_0) \neq 0$ என இருந்தால்,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ தொடருடையது.

2. வகைக் கெழு

(Derivative)

2-1. X என்ற ஒரு திறந்த இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற மெய்யெண் சார்பு வரையறை செய்யப்படட்டும். இந்த இடைவெளியில் x_0 ஒரு புள்ளி என்க. x-ன் மதிப்பு; x_0-லிருந்து $x_0 + h$-க்கு மாறும்போது, சார்பில் உண்டாகும் சராசரி மாறறம்

$$= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ என ஆகிறது.

h பூச்சியத்தை நெருங்கும்போது, $[f(x_0+h) - f(x_0)]$-ன் மதிப்பும் பூச்சியத்தை நெருங்குகிறது. ஆனால் அவற்றின் ஈவு ஓர் அளவிடக்கூடிய எல்லையை அணுகலாம்.

வரையறை

$$x = x_0 \text{ என்ற இடத்தில் } \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

என்ற அளவிடக்கூடிய எல்லை மதிப்பு இருந்தால் இந்த எல்லைக்கு $f(x)$-ன் வகைக் கெழு [Derivative of $f(x)$] எனப் பெயர். இந்த வகைக் கெழு $f'(x_0)$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. பொதுவாக x இடத்து வகைக் கெழுவை $f'(x)$ என்றும், சார்பு $y = f(x)$ எனக் கொடுக்கப்பட்டால், வகைக் கெழு $\frac{dy}{dx}$ எனவும் குறிக்கப்படுகிறது. [f' என்ற குறியீடு (Newton) என்பவராலும், $\frac{dy}{dx}$ என்ற குறியீடு Leibnitz என்பவராலும் முதன் முதலாகப் பயன் படுத்தப்பட்டது].

2-2. பௌதிகம், மற்றும் வடிவ கணித விளக்கங்கள்

(i) ஒரு மோட்டார் வண்டி, A–யிலிருந்து கிளம்பி ஒரு சாலையில் செல்வதாகக் கொள்வோம். t விநாடிகளில் அது செல்லும் தொலைவு s,

$s(t) = 20\ t^2$ என்ற இணைப்பால் கொடுக்கப்படுவதாகக் கருதுவோம். ஒரு விநாடிக்குப் பிறகு அதன் வேகத்தைக் கணக்கிடுவோம். $1 + h$ விநாடிகளில் அது செல்லும் தொலைவு $s(1+h) = 20(1+h)^2$. ஒரு விநாடியில் செல்லும் தொலைவு $s(1) = 20.\ 1^2$. 1 விநாடியிலிருந்து $(1+h)$ விநாடி வரை அதன் சராசரி வேகம்

$$= \frac{s(1+h) - s(1)}{h}$$ h, பூச்சியத்தை நெருங்கினால இக்கோவையின் எல்லை 1 விநாடியின்போது வண்டியின் வேகத்தைக் கொடுக்கும். இந்த எல்லைதான் $s'(t)$ என்ற வகைக்கெழு.

$\therefore$ 1 விநாடியில் வண்டியின் வேகம்

$$= s'(t)_{t=1} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{s(1+h) - s(1)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{20(1+h)^2 - 20 . 1^2}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{20[2h + h^2]}{h}$$

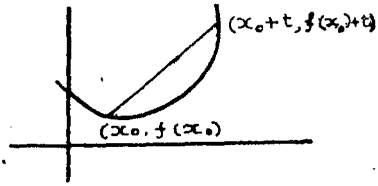
$$= \underset{h \to 0}{Lt}\ 20[2 + h]$$

$=$ 40 அலகுகள் .

இவ்விதம் வகைக் கெழு, ஒரு துகளின் திசை வேகத்தைக் கொடுக்கிறது.

(ii) x_o என்ற ஏதேனும் புள்ளியில் f என்ற சார்பின் சாய்வு விகிதம் (x_o t D_f)

f என்ற சார்பின் வரைபடம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது (படம் 2-1).



படம் 2-1

படம் 2.1-ல் உள்ளபடி $[x_o, f(x_o)]$ என்ற புள்ளியைக் காண்க, மேலும் t என்ற ஏதேனும் ஓர் எண்ணிற்கு $[x_o + t, f(x_o + t)]$ என்ற புள்ளியையும் நாம் காணலாம். இந்த இரண்டு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்கோட்டினால் இணைக்கலாம். இந்த நேர் கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $\frac{f(x_o + t) - f(x_o)}{t}$. t என்ற எண் மிகை எண்ணாகவோ அல்லது குறை எண்ணாகவோ இருக்கலாம். Df-யில் x_o என்ற புள்ளியில் f என்ற சார்பின் சாய்வு விகிதம் $[f'(x)]_{x = x_o} = \underset{t \to 0}{Lt} \frac{f(x_o + t) - f(x_o)}{t}$

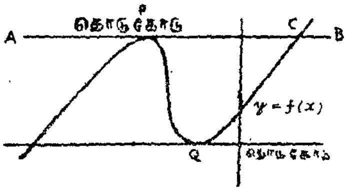
(எல்லை மதிப்பு இருந்தால்) எனக் கிடைக்கிறது.

(iii) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியில் வளைவரையின் தொடு கோடு

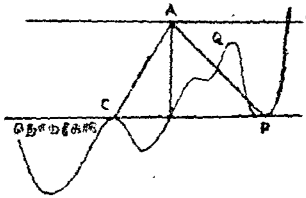
f என்ற சார்பின் வரைபடத்தில் $[(x_o, f(x_o)]$ என்ற புள்ளியில் தொடு கோடு, $f'(x_o) = \underset{\delta \to 0}{Lt} \frac{f(x_o + \delta) - f(x_o)}{\delta}$

(என்ற எல்லை மதிப்பு இருந்தால்) என்கிற சாய்வு விகிதத்தை யுடைய அந்தப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லக்கூடிய நேர்கோடு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. ஒரு நேர்கோடு வட்டத்திற்குத்

தொடுகோடானால், அந்த நேர்கோடு வட்டத்தை ஒரே புள்ளியில் தான் சந்திக்கும். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள (படம் 2·2) விளக்கத்தின்படி இந்தக் கொள்கை எல்லா வளைவரைகளுக்கும் உண்மையாகாது.



படம் 2 - 2 (a)



படம் 2·2 b

படம் 2.2 (a)யில்

P என்ற புள்ளியில் இருக்கும் தொடுகோடு AB வளை வரையை C என்ற மற்றொரு புள்ளியில் வெட்டுகின்றது.

படம் 2.2 (b)-யில்

AP என்ற தொடுகோடு வளைவரையை Q, R என்ற புள்ளி களில் வெட்டுகின்றது.

பயிற்சி 2 - 2

(1) கீழ்க் கண்டவற்றின் சாய்வு விகிதத்தைக் காண்க.

(i) $y = 5 - x$, (1, 4) என்ற புள்ளியில்

(ii) $y = x + 1$, (1, 2) என்ற புள்ளியில்

(iii) $y = x^2$, (1, 1) என்ற புள்ளியில்

(iv) $y = 3x^2 + 1$, (1, 4) என்ற புள்ளியில்.

(2) கீழ்க் கண்டவற்றில் $s(t)$ என்ற சார்பு, t நேரத்தில் ஒரு துகள் செல்லும் தொலைவைக் கொடுக்கிறது. குறிப்பிட்ட நேரங்களில் துகள்களின் வேகத்தைக் காண்க.

(i) $s(t) = 6t^2 + 7t + 1, \quad t = 1$

(ii) $s(t) = 4t^3 + 3t + 1, \quad t = \frac{1}{2}$

(iii) $s(t) = t^3 - 2t + 1, \quad t = 3$

2-3. சில எளிய சார்புகளின் வகைக் கெழுக்கள்

(1) $f(x) = x^n$ (n ஒரு விகிதமுறு எண்) என்ற சார்பின் வகைக் கெழு $f'(x) = n\,x^{n-1}$

நிறுவல் :

$$(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{(x+h) \to x}{Lt} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h) - x}$$

$$= n \,.\, x^{n-1}, \text{ ஏனெனில் } \underset{x \to a}{Lt} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

$$= n.\, a^{n-1}$$

(2) $f(x) = \sin x$ என்றால்

$$f'(x) = \cos x.$$

நிறுவல் :

$$f^1(x) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{Lt} \frac{2 \cos (x + h_2) \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$= \underset{\frac{h}{2} \to 0}{Lt} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) \underset{h \to 0}{Lt} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

$= \cos x$, ஏனெனில் $\underset{\theta \to 0}{Lt} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$.

பயிற்சி 2 - 2

(1) கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபி.

(i) $f(x) = c$ எனில், $f'(x) = 0$

(ii) $f(x) = c\, g(x)$ எனில், $f'(x) = c\, g'(x)$

(iii) $f(x) = \cos x$ எனில், $f'(x) = -\sin x$

(iv) $f(x) = \tan x$ எனில், $f'(x) = \sec^2 x$

(v) $f(x) = \operatorname{cosec} x$ எனில், $f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$

(vi) $f(x) = \sec x$ எனில், $f'(x) = \sec x \tan x$

(vii) $f(x) = \cot x$ எனில், $f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

(2) கீழ்க் கண்ட சார்புகளுக்கு, xஐப் பொறுத்து வகைக் கெழு காண்க.

(i) $x^{\frac{3}{2}}$ (ii) $4x^3 + 3x^2 + x^{\frac{1}{2}}$ (iii) $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}$

(vi) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ (v) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ (vi) $\sin 2x$

(vii) $\cos 2x$.

(3) ஒரு சார்பின் வகைக் கெழுவை வரையறுத்து. அது எவ்விதம் (i) மாறுதல் வீதம் (ii) சாய்வு வீதம் (iii) தொடு வரை இவற்றுடன் தொடர்பு கொண்டுள்ளது என்பதை விளக்குக.

(4) ஒரு பலூனுக்குள் காற்று ஏற்றப்படுகிறது. அதன் ஆரம் 10 செ.மீ/வினாடி வேகத்தில் அதிகரிக்கிறது. ஆரம் 2 செ.மீ என இருக்கும்போது எந்த வீதத்தில் காற்று ஏறுகிறது எனக் காண்க.

(5) ஒரு கோள உருவ பனிக்கட்டி உருகுகிறது. அதன் ஆரம் 0·1 மில்லி மீ/வினாடி வீதம் குறைகிறது. அதன் ஆரம் 1 செ.மீ என இருக்கும்போது, எந்த வீதத்தில் அதன் கன அளவு குறைகிறது எனக் காண்க.

2-4. இரண்டு சார்புகளின் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், இவற்றின் வகைக்கெழுக்கள்

(a) $y = c f(x)$ ஆயின், $\frac{dy}{dx} = cf'(x)$

(b) $y = f(x) \pm g(x)$ ஆயின், $\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$

(c) $y = f(x)\, g(x)$ ஆயின்,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

(d) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ ஆயின், $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{[\, g'(x)\,]^2}$

நிறுவல் :

(a) $y = c\, f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt}\; c \left[\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \right]$$

$$= c \underset{\delta x \to 0}{Lt} \left[\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} \right]$$

$$= c\, f'(x)$$

(b) $y = f(x) + g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \left[\frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x} + \frac{g(x + \delta x) - g(x)}{\delta x} \right]$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

(c) $y = f(x)\, g(x)$

$$\delta y = f(x + \delta x)\, g(x + \delta x) - f(x)\, g'(x)$$

$$= f(x + \delta x)\, g(x + \delta x) - f(x + \delta x)\, g(x)$$

$$+ f(x + \delta x)\, g(x) - f(x)\, g(x)$$

அல்லது $\frac{\delta y}{\delta x} = f(x+\delta x)\left[\frac{g(x+\delta x)-g(x)}{\delta x}\right]$

$$+ g(x)\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

(*d*) $$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\delta y = \frac{f(x+\delta x)}{g(x+\delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

அல்லது $\frac{\delta y}{\delta y} = \frac{f(x+\delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\delta x)}{g(x+\delta x)\,g(x)\,\delta x}$

$$= \frac{f(x+\delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\delta x)}{g(x+\delta x)\,g(x)\,\delta x}$$

$$= \frac{g(x)\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+\delta x)-g(x)}{\delta x}\right]}{g(x+\delta x)\,g(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

மாதிரி 2-1.

$g(x) - (x^2+1)^2 + 2x$ என்றால், $x = 0$ என்ற இடத்தில் $g(x)$-ன் சாய்வு விகிதம் என்ன ?

$$g(x) = x^4 + 2x^2 + 1 + 2x$$

சாய்வு வீதம் = வகைக் கெழு = $g'(x)$

இங்கு, $g'(x) = 4x^3 + 4x + 2$

$x = 0$ என்ற இடத்தில் சாய்வு விகிதம்

$$= g'(0) = 2$$

மாதிரி 2-2

ஒரு துகள் x-அச்சு வழி இயங்குகிறது. t விநாடிகளில் ஆதியிலிருந்து அதன் தொலைவு s,

$$s(t) = \frac{t^2 + 4}{t + 2}$$

என்ற சார்பால் கொடுக்கப்படுகிறது. அதன் துவக்க வேகததைக் காண்க.

துகளின் வேகம் = வகைக் கெழு $s'(t)$ எனத் தெரியும்.

$$\text{வேகம்} = s'(t) = \frac{(t + 2)(2t) - (t^2 + 4)(1)}{(t + 2)^2}$$

$$\frac{t^2 + 4t - 4}{(t + 2)^2}$$

துவக்க வேகம், $t = 0$ என்ற நேரத்தில் உள்ளது.

$$\therefore \text{துவக்க வேகம்} = s'(0) = \frac{-4}{4} = -1$$

இங்கு குறைக்குறி, துகள் இடது பக்கமாகச் செல்ல ஆரம்பிப்பதைக் குறிக்கிறது.

மாதிரி 2-3

$F(x) = |x|$. $F'(x)$ ஐ அது இருக்குமிடங்களில் காண்க.

இங்கு $F(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \text{ என்றால்} \\ -x, & x < 0 \text{ என்றால்} \end{cases}$

$\therefore \quad F'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \text{ என்றால்} \\ -1, & x < 0 \text{ என்றால்} \end{cases}$

$$F'(0) = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \underset{h \to 0}{Lt} \frac{|h|}{h}$$

$= +1$ அல்லது -1

இந்த எல்லை, குறிப்பிடும் ஒரு மதிப்பை அணுகாததால் எல்லை இல்லை என ஆகிறது.

$\therefore x = 0$ என்ற இடத்தில் $F'(x)$ இல்லை.

மாதிரி 2-4

x-ஐப் பொருத்து $(x+1)^2 \sin x$ என்ற சார்பின் வகைக்கெழு காண்க.

இங்கு $f(x) = (x+1)^2$ என்க

$g(x) = \sin x$ என்க

$\therefore$ சார்பு $y = f(x)\, g(x)$

பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

$$= (x+1)^2 \cos x + (\sin x) 2(x+1)$$

மாதிரி 2-5.

$\dfrac{4x^2 - x + 1}{1 + x}$ ன் வகைக்கெழு காண்க

இங்கு $f(x) = 4x^2 - x + 1$, $g(x) = 1 + x$ என்க

சார்பு $y = \dfrac{4x^2 - x + 1}{1+x} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{(1+x)(8x-1) - 4x^2 - x+1)}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 7x - 1 - 4x^2 + x - 1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{4x^? + 8x - 2}{(1+x)^2}$$

பயிற்சி 2 - 3.

கீழே (1)-லிருந்து (17)-வரை கொடுக்கப்பட்ட சார்புகளுக்கு வகைக் கெழு காண்க.

(1) $ax(x+b)^2$ (2) $x^{\frac{5}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + 1)$

(3) $x^2(1+x)$ (4) $4x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 5)$

(5) $\sin x \cos x$ (6) $\sec^2 x$ (7) $\cot x \operatorname{cosec}^2 x$

(8) $\frac{x}{x+1}$ 9. $\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ 10. $\frac{x^2+5}{x-1}$

(11) $\frac{x-1}{x^3+1}$ (12) $\frac{\sin x}{\cot x}$ (13) $\frac{\sec x}{\tan x}$

(14) $\tan x$ (15) $\cot x$ (16) $\operatorname{cosec} x$

(17) $\cot x$.

(18) ஒரு துகள் x-அச்சில் இயங்குகிறது. அதன் தொலைவு கீழ்க் கண்ட சார்புகளால் கொடுக்கப்பட்டால், அதன் துவக்க வேகத்தையும், முடுக்கத்தையும் (acceleration) காண்க.

(a) $(t^2+1)(t+1)$ (b) $\frac{t}{t+2}$ (c) $\frac{t+1}{t-1}$

[குறிப்பு : முடுக்கம் = வேகத்தின் வீதம் = $\frac{dv}{dt}$]

2-5. *சார்பின் சார்பினது வகைக்கெழு :* (Derivative of a function of a function)

$y = [x^2-4x+8)^{\frac{1}{3}}$ என்க.

இங்கு x^2-4x+8 என்ற சார்பை, u எனக் கருதுவோம்.

இப்பொழுது $y = u^{\frac{1}{3}}$ என ஆகிறது.

ஆகையால், y ஐச் சார்பின் சார்பு எனக் கூறலாம்.

இதுபோல, $y=\sin(3x^2+4)$, $y = \sqrt{\tan x}$

போன்றவைகள், சார்பின் சார்புகளாகும். இவ்வித சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காணும்முறையைப் பார்ப்போம்.

$y = f(u)$ மற்றும் $u = g(x)$

அதாவது $y = f[g(x)]$ = x-ன் சார்பு என ஆகிறது.

x-ல் உண்டாகும் சிறிய மாறுதலை δx என்போம். இதனால், u வில் உண்டாகும் சிறிய மாறுதலை δu என்றும், y-ல் உண்டாகும் சிறிய மாற்றுதலை δy என்றும் குறிப்போம்.

$$\text{இப்பொழுது } \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \quad \frac{\delta u}{\delta x}$$

என எழுதலாம்.

δx, பூச்சியத்தை நெருங்கும்போது, δu, δy இவைகளும் பூச்சியத்தை நெருங்குகின்றன.

இரு பக்கங்களுக்கும் எல்லைகள் எடுப்போம்,

$$\underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \left(\frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}\right)$$

$$= \left(\underset{\delta u \to 0}{Lt} \frac{\delta y}{\delta u}\right) \cdot \left(\underset{\delta x \to 0}{Lt} \frac{\delta u}{\delta x}\right)$$

அல்லது $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 2-6

$(2x^2 + 4)^3$ என்பதன் வகைக்கெழு காணுவோம்.

$$y = (2x^2 + 4)^3$$

$u = 2x^2 + 4$ என்க

$$\therefore y = u^3$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 4x; \quad \frac{dy}{du} = 3u^2$$

என ஆகிறது.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 . 4x$$

$$= 12x(2x^2 + 4)^2.$$

மாதிரி 2-7

$y = \sin(4x + 5)$ என்பதின் வகைக்கெழு காண்க.

$u = 4x + 5$ என்க.

$y = \sin u$ என ஆகிறது.

$\frac{du}{dx} = 4, \quad \frac{dy}{du} = \cos u$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u)\,4$$

$$= 4\cos(4x + 5)$$

மாதிரி 2-8

$y = \cos^3\left(\frac{x}{5}\right)$ என்றால் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$u = \frac{x}{5}$ என்க.

$y = \cos u$ என்க.

$\therefore \quad y = v^3$ என ஆகிறது.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{5}, \frac{dv}{du} = -\sin u, \frac{dy}{dv} = 3y^2$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ என உள்ளது.}$$

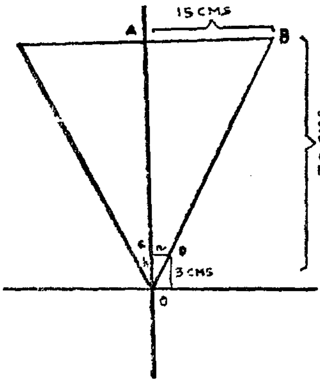
$$= 3y^2 . (-\sin u) . \frac{1}{5}$$

$$= -\frac{3}{5} \cos^2 \frac{x}{5} \sin \frac{x}{5}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 2-9

ஒரு கூம்பு உருவத்திலுள்ள தொட்டியில் தண்ணீர், நிமிடத்துக்கு 5 க.செ.மீ. வீதம் நிறப்பப்படுகிறது. தொட்டியின் உயரம் 30 செ.மீ., உச்சி ஆரம் 15 செ.மீ. என்றால் தண்ணீர் மட்டம், 3 செ.மீ. உயரத்தில், என்ன வேகத்தில் உயருகிறது?



படம் 2 4

பொதுவான நேரம் 't' யில், தொட்டியில் உள்ள தண்ணீரின் உருவம் ஒரு கூம்பு.

இக கூம்பின் உயரம் h, ஆரம் r என்க.

தண்ணீரின் கன அளவு

$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ என ஆகிறது.

வடிவொதத முக்கோணஙகள் OCD, OAB இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{h}{30} = \frac{r}{15}$$ எனக கிடைககிறது.

$$\therefore \quad r = \frac{h}{2}$$

$$\therefore \quad v = \frac{1}{3} \pi h . \frac{h^2}{4} = \frac{\pi}{12} h^3$$

என ஆகிறது.

't' ஐப் பொறுதது இருபக்கங்களுக்கும் வகைக்கெழு காணுவோம்.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{12} \quad 3\, h^2 \ \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \ \frac{dh}{dt}$$

கொள்கைபபடி, $\frac{dv}{dt} = 5$ எனவும், $h = 3$ எனவும் உள்ளன இவற்றைப பிரதியிட,

$$5 = \frac{9\pi}{4} . \ \frac{dh}{dt}$$

அல்லது $\frac{dh}{dt} = \frac{20}{9\pi}$ செ.மீ./நிமிடம்

எனக் கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 2.4.

கீழ்க் கண்ட சார்புகளை, x ஐப் பொருத்து வகைப்படுத்துக.

(1) $x^2 \cos 4x$ (2) $x^4 (x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

(3) $(ax^2 + bx + c)^3$ (4) $\cos^2 (x^{\frac{1}{2}})$

(5) $\frac{3 \cos^2 x}{\sin x}$ (6) $\tan (x^2)$

2.6. எதிர்மறைச் சார்புகள் (Inverse functions)

$y = f(x)$ எனக் கொள்வோம். இச்சமன்பாட்டில் x-ன் சார்பாக y-கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. இதனை விடுவித்து y-ன் சார்பாக x ஐக் காண இயலும்.

இது $x = \phi(y)$ என இருந்தால், 'ϕ' என்பது 'f'-ன் எதிர் மறைச் சார்பு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 1:

$y = x^2$ இதன் எதிர்மறைச் சார்பு, $x = \pm \sqrt{y}$ என உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$y = \sin x$ எனின்,

$x = \sin^{-1} y$ என்பது எதிர்மறைச் சார்பாகும்.

மேலும், $\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{1}{\frac{\delta y}{\delta x}}$, என எழுதலாம்.

எ கள் எடுக்க: $\underset{\delta y \to 0}{Lt} \dfrac{\delta x}{\delta y} = \dfrac{1}{\underset{\delta x \to 0}{Lt} \dfrac{\delta y}{\delta x}}$

அல்லது $\dfrac{d x}{d y} = \dfrac{1}{\dfrac{d y}{d x}}$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 2-10

$$y = \sin^{-1} x \text{ என்க } (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\therefore x = \sin y$$

$$\therefore \frac{d x}{d y} = \cos y$$

அல்லது $\dfrac{d y}{d x} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 y}}$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 2-11

$$y = x^{\frac{1}{n}} \quad (x \geq 0)$$

$$\therefore x = y^n$$

$$\therefore \frac{d x}{d y} = n y^{n-1}$$

$$\therefore \frac{d y}{d x} = \frac{1}{n y^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n} - 1}$$

மாதிரி 2-12

$y = \tan^{-1}(\sin x)$ எனின், $\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \tan^{-1}(\sin x)$$

$$\therefore \quad \sin x = \tan y$$

இரு பக்கங்களையும், y ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தவும்.

$$\cos x \cdot \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

அல்லது, $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{\sec^2 y}{\cos x}$

அல்லது, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{\sec^2 y} = \dfrac{\cos x}{1 + \tan^2 y}$

$$= \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$$

பயிற்சி 2 - 5

கீழ்க் கண்டவற்றைச் சரிபார்க்க :

(1) $\dfrac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

(2) $\dfrac{d}{dx}[\tan^{-1} x] = \dfrac{1}{1 + x^2}$ (x-ன் எல்லா மதிப்புக்கும்)

(3) $\dfrac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ (x-ன் எல்லா மதிப்புக்கும்)

(4) $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad (|x| > 1)$

(5) $\dfrac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1}x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad (|x| > 1)$

2-7. படிக்குறிச் சார்பு (Exponential function)

$1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \ldots$ என்ற முடிவில்லாத் தொடரின் கூட்டுத் தொகை 2.7 என்ற மதிப்பை அணுகுகிறது. இத்தொடரின் மதிப்பு 'e' என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது. e^x என்பதும் ஒரு தொடர் என்றும் அதன் விரிவை,

$$e^x = 1 + \frac{x}{\lfloor 1} + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$$ எனவும்,

எழுதலாம் என்பதை இயற்கணிதத்தில் அறியலாம்.

e^x என்பது படிக்குறிச் சார்பு (exponential function) எனப்படுகிறது. இதில் x படிக்குறியாக அமைந்துள்ளதைப் பார்க்கலாம்.

தேற்றம்

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$ எனக் காண்பி.

$y = e^x$ என்க.

$$y + \delta y = e^{x + \delta x}$$

அல்லது $\delta y = e^x . e^{\delta x} - e^x$

$$= e^x [e^{\delta x} - 1]$$

$$= e^x \left[1 + \frac{\delta x}{\lfloor 1} + \frac{(\delta x)^2}{\lfloor 2} + \ldots\ldots - 1 \right]$$

அல்லது, $\frac{\delta y}{\delta x} = e^x \left[\frac{1}{\lfloor 1} + \frac{\delta x}{\lfloor 2} + \ldots\ldots \right]$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt.} \frac{\delta y}{\delta x} = e^x$$ எனக் கிடைக்கிறது.

மடக்கைச் சார்பு (Logarithmic function)

இது படிக்குறிச் சார்பின் எதிர்மறைச் சார்பு.

$y = e^x$ என்றால்

x, e ஐப் பொறுத்து y-ன் மடக்கை (logarithm) எனப்படுகிறது. இதை, $x = \log_e y$ என எழுதலாம்.

தேற்றம்

$$y = \log_e x \text{ என்றால் } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

நிறுவல் :

$$y = \log_e x$$

$$\therefore \quad x = e^y$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dy} = e^y$$

அல்லது, $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$ என ஆகிறது.

பின்வருவனவற்றிலெல்லாம், மடக்கை 'e'-யைப் பொறுத்தது எனக் கொள்வோம். 'e' என்பது இயற்கை அடிப்படை (Natural base) *எனப்படுகிறது.*

மாதிரி 2–13

$x \log x$-ன் வகைக்கெழு காண்க.

$$y = x \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} (\log x) + (\log x) \frac{d}{dx} (x)$$

$$= \frac{x}{x} + \log x$$

$$= 1 + \log x$$

மாதிரி 2-14

$\frac{d}{dx}$ [log (sin x)] = cot x எனக் காட்டுக.

$y = \log (\sin x)$ என்க

$u = \sin x$ என்க

$\therefore \quad y = \log u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

எனக் கிடைக்கிறது.

பயிற்சி 2 - 6

1. கீழ்க் கண்ட சார்புகளுக்கு, x ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காண்க :

(a) $\sec^{-1} (x^2)$ (b) $\tan^{-1} (x^3+1)$ (c) $\sin^{-1} (ax+b)$

(d) $\log (ax+b)$ (e) e^{x^2} (f) $e^{\sin x}$

(g) e^{ax^2+bx+c} (h) $\log (e^{ax+b})$

(i) $\log (3x^2+4x-1)$ (j) $\log (\cos x)$

(k) $\log (\tan x)$

2. கீழ்க்கணடவற்றை xஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்தவும்.

(i) $\dfrac{x^5(x^3-1)}{(3-2x)^{\frac{1}{2}}}$ (ii) $\dfrac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{(x^3+1)^{\frac{1}{5}}}$

(iii) $\log\left(\dfrac{\sec x}{e^x-1}\right)$.

2·8. வகைக் கெழுவின் திசைக்குறி — கூடும் சார்பு, குறையும் சார்பு (Sign of the Derivative — Increasing and decreasing function)

$y = f(x)$, ஒரு கூடும் சார்பு என்க.

இதன் வரைபடம் மேல்நோக்கிச செல்கிறது. அதாவது: x அதிகமானல், y யும் அதிகமாகிறது.

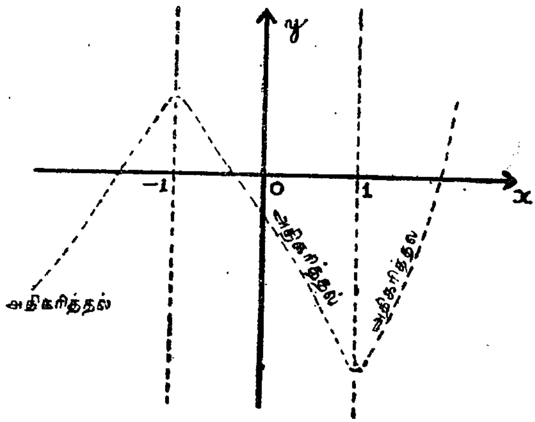
அல்லது, δx மிகையானல், δy யும் மிகையாக உள்ளது.

$\therefore \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{+}{+} = +$ என உள்ளது.

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt} \dfrac{\delta y}{\delta x} = +$ எனக் கிடைக்கிறது. மறுதலை யாக, $\dfrac{dy}{dx}$ ஓர் இடத்தில் மிகையாக இருந்தால், சார்பு, கூடும் சார்பாக உள்ளது.

y, ஒரு குறையும் சாாபு என்க. இதன் வரைபடம், கீழ் நோக்கிச் செல்கிறது. அதாவது, x அதிகமானல், y குறைகிறது.

அல்லது, δx மிகையானல் δy குறைவாக உள்ளது



படம் 2-5

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-}{+} = - \text{ என ஆகிறது}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{Lt.} \frac{\delta y}{\delta x} = - \quad (\text{குறை}).$$

மறுதலையாக, $\frac{dy}{dx}$ குறைதிசை கொண்டால் y, ஒரு குறையும் சார்பாக உள்ளது.

குறிப்பு :

ஓர் இடத்தில் $\frac{dy}{dx}$ பூச்சியமானல், அங்கு அதன் திசை மிகையுமல்ல, குறையுமல்ல. ஆகையால் அங்குச் சார்பு கூடுவதோ அல்லது குறைவதோ இல்லை. அங்கு அது நிலையாக (Stationary) உள்ளது எனப்படுகிறது.

மேலும், இந்த இடத்தில், வளைவரையின் தொடுவரை x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும். படத்தில் *A, B* என்ற இடங்களில் சார்பு நிலையாக உள்ளது.

மாதிரி 2-15

$$f(x) = 2x^3 - 6x + 1$$

என்ற சார்பு எங்கு (1) கூடும் சார்பாக (2) குறையும் சார்பாக (3) நிலையாக உள்ளது எனக் காண்க. இதைப் பயன்படுத்திச் சார்பின் வரைபடம் வரைக.

$$y = 2x^3 - 6x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$$

$$= 6(x+1)(x-1)$$

$x = 1, x = -1$ என்ற இடங்களில் $\frac{dy}{dx} = 0$ என உள்ளது. ஆகையால் இப் புள்ளிகள் சார்புக்கு நிலைப்புள்ளிகள் (stationary points) ஆகும்.

மற்றும் $x < -1$, $x > 1$, என இருக்குமிடங்களில்

$$\frac{dy}{dx} = 6(+)(+) \text{ அல்லது } 6(-)(-) = +$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx}$ மிகையாக உள்ளது.

ஆகையால் இவ்விடத்தில் சார்பு கூடுவதாக உள்ளது.

$-1 < x < 1$ என்ற இடைவெளியில்

$$\frac{dy}{dx} = 6(+)(-) = -6$$

$\frac{dy}{dx}$ குறையாக உள்ளது.

ஆகையால் இவ்விடத்தில் சார்பு குறைவதாக உள்ளது. மேலும், $x = 1$ என்றால் $y = -3$ என்றும், $x = -1$ என்றால் $y = 5$ என்றும் உள்ளது. இவற்றைப் பயன்படுத்தி, சார்பின் வரைபடம் அடையப்படுகிறது.

பயிற்சி 2 - 7

கீழ்க் கண்ட சார்புகளின் வரைபடங்கள் வரைக.

(i) $x^3 - 3x + 1$ (ii) $x^2 - 3x + 1$ (iii) $x^4 - 2x^2 + 3$

2-9. ஒரு வளைவரையின்மேல், ஒரு புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடு காணுதல் (Equations to Tangent and Normal)

வளைவரை $y = f(x)$ என்க.

வகைக்கெழு $f'(x)$, வளைவரையின் பொது இடத்துத் தொடுவரையின் சாய்விகிதம் என 2-2 என்ற தலைப்பில் பார்த்துள்ளோம்.

(x_0, y_0), வளைவரையில் ஒரு புள்ளி என்க. $f'(x_0)$ என்பது இப் புள்ளியிடத்துத் தொடுவரையின் சாய்வு விகிதம். தொடுவரை (x_0, y_0) வழி செல்கிறது.

ஆகையால் தொடுவரையின் சமன்பாடு :

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ எனக் கிடைக்கிறது.

மற்றும், (x_0, y_0) இடத்துச் செங்கோடு, இங்குள்ள தொடுவரைக்குச் செங்குத்து.

ஆதலால் அதன் சாய்வு விகிதம் $= -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ என உள்ளது.

∴ அதன் சமன்பாடு :

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 2-16

$f(x) = x^2 + 3x + 1$ என்ற வளைவரையில் $(0, 1)$ என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$f'(0) = 3,$$

$\therefore$ தொடுவரையின் சமன்பாடு :

$$y - 1 = 3(x - 0)$$

அல்லது $3x - y + 1 = 0$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு :

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 0)$$

அல்லது $3y - 3 = -x$

அல்லது, $x + 3y - 3 = 0.$

பயிற்சி 2 - 9

கீழ்க் கண்ட வளைவரைகளுக்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளிடத்துத் தொடுவரை, செங்கோடு இவற்றின் சமன்பாடுகளைக் காண்க :

(i) $y = x(x-1)^5$, $(1, 0)$ என்ற புள்ளியில்

(ii) $y = x^2 + 2x + 3$, $(0, 3)$,,

(iii) $y = \dfrac{x}{x+1}$, $(1, \tfrac{1}{2})$,,

(iv) $y = \dfrac{1}{x}$, $(3, \tfrac{1}{3})$,,

(v) $y = (x+1)(x^2-1)^2$ $(1, 0)$,,

(vi) $y = (x+2)^2$, $(1, 9)$,,

2-10. தொடர்வகைக்கெழு காணுதல் (Repeated or Successive Differentiation)

$y = f(x)$ என்ற சார்பு கொடுக்கப்பட்டால் $\frac{dy}{dx}$ அல்லது $f'(x)$ என்ற வகைக்கெழு கிடைக்கிறது. இதற்கு முதல் வகைக் கெழு y_1 எனப் பெயர். வகைக்கெழுவும் x-ன் ஒரு சார்பு ஆதலால், மீண்டும் அதை வகைப்படுத்தலாம். இதன் வகைக்கெழுவை y-ன் இரண்டாம் வகைக்கெழு எனக் கூறலாம். அதாவது.

$$y_2 = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

இதேபோல ஒரு சார்பை n தடவைகள் வகைப்படுத்தினால், y_n என்ற n ஆவது வகைக்கெழு கிடைக்கிறது. இது, y_n அல்லது $f^{(n)}(x)$ அல்லது $\frac{d^ny}{dx^n}$ என எழுதப்படுகிறது.

மாதிரி 2-17

கீழ்க் கண்ட சார்பின் முதல் மூன்று வகைக் கெழுக்களை அடையவும் :

$$y = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 7x + 5$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 6x^2 - 16x + 7$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 12x - 16.$$

$$y_3 = \frac{d^3y}{dx^3} = 24x + 12$$

2.11 சில நியமச் சார்புகளின் nஆம் வகைக்கெழு :

(i) $y = (ax + b)^n$ என்ற சார்பின் r ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$y_1 = n(ax + b)^{n-1}a$$

$$y_2 = n(n-1)(ax+b)^{n-2}a^2$$

$$y_3 = n(n-1)(n-2)a^3(ax+b)^{n-3}$$

இதே போல,

$$y_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\,a^r(ax+b)^{n-r} \quad (r<n)$$

குறிப்பு 1 :

$r = n$ என்றால்,

$$y_n = n(n-1)\dots\dots\dots\dots3.2.1.a^n$$

$= \lfloor n \; a^n$ எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பு 2 :

$a=1,\ b=0$ என்றால்,

$$y = x^n$$

$y_n = \lfloor n$ என ஆகிறது.

(ii) $y = \log(ax+b)$-ன் n ஆம் வகைக்கெழு காண்க.

$$y_1 = \frac{a}{ax+b} = a(ax+b)^{-1}$$

$$y_2 = (-1)a^2(ax+b)^{-2}$$

$$y_3 = (-1)(-2)a^3(ax+b)^{-3}$$

$$= (-1)^2 \lfloor 2 \; a^3(ax+b)^{-3}$$

....

$$y_n = (-1)^{n-1} \lfloor n-1 \; a^n(ax+b)^{-n}$$

(iii) $y = \dfrac{1}{ax+b} = (ax+b)^{-1}$

$$y_1 = (-1)(ax+b)^{-2}a$$

$$y_2 = (-1)(-2)a^2(ax+b)^{-3}$$

$$= (-1)^2 \lfloor 2 \; a^2 \; (ax+b)^{-3}$$

....

$$y_n = (-1)^n \lfloor n \; a^n \; (ax+b)^{-(n+1)}$$

(iv) $y = \cos(ax+b)$

$$y_1 = -a \sin(ax+b)$$

$$= a \cos\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2 = -a^2 \sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= a^2 \cos\left(ax+b+2.\frac{\pi}{2}\right)$$

இதே போல,

$$y_3 = a^3 \cos\left(ax+b+3\frac{\pi}{2}\right)$$

....

$$y_n = a^n \cos\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

(v) $y = \sin(ax+b)$ என்றால்

$y_n = a^n \sin\left(ax+b+n\frac{\pi}{2}\right)$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

(vi) $y = e^{ax+b}$ என்றால்

$y_n = a^n e^{ax+b}$ எனக் காண்பிக்கலாம்.

பயிற்சி 2-9

(i) கீழ்க் கண்டவற்றின் இரண்டாவது வகைக்கெழு காண்க :

(a) $y = \tan^{-1} x$ (b) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$

(c) $y = x^2 \sin 2x$

(ii) கீழ்க் கண்டவற்றின் மூன்றாவது வகைக்கெழு காண்க.

(a) $y = \sqrt[4]{x^3}$ (b) $y = e^x \sin 3x$

(c) $y = e^{\sin x}$

(iii) கீழ்க் கண்டவற்றின n-ஆம் வகைக்கெழு காண்க :

(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = e^{2x-3}$ (c) $y = e^{\sin x}$

(iv) $y = \cos x$ எனில், $y_2 + y = 0$ எனக் காண்பி

(v) $y = e^{-x} \cos x$, $y_4 + 4y = 0$ எனக் காண்பி.

(vi) $y = \sin (\log x)$ எனில், $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$ எனக் காண்பி.

(vii) $y = e^{\sin^{-1} x}$, $(1-x^2)\, y_2 - x y_1 - y = 0$ எனக் காண்பி.

3. தொகை காணல்

(Integration)

3-1 ஒரு சார்பு கொடுக்கபபட்டால் அதன் வகைகெழுச் சார்பைக்காணும் வழி முறைகளைச் சென்ற அத்தியாயத்தில் பார்த்தோம். இப்பொழுது, ஒரு சார்பு $f(x)$ கொடுக்கப்படடால், இதை வகைக்கெழுவாகக் கொண்ட முதற் சார்பு யாது எனக் கண்டு பிடிப்பது இந்த அததியாயத்தின் முக்கிய நோக்கமாகும்.

வரையறை

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$ என இருந்தால் $F(x)$ என்பது, $f(x)$-ன் 'முதற்சார்பு' (Primitive) அல்லது 'தொகை' (Integral) எனப்படுகிறது. இதை $F(x) = \int f(x)\,dx$ என எழுதுவது மரபு.

உதாரணமாக, $\int \cos x\,dx = \sin x$ ஏனெனில்,

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x, \text{ ஏனெனில் } \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}.$$

மேலும் $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ என்றால்,

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] \text{ கூட } f(x) \text{ என உள்ளது.}$$

[இதில் C ஒரு மாறிலி]

ஆகையால் $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ எனக் கருதபபடுகிறது.

இவ்விதம், முதற்சார்பு காணுமிடத்தில் எல்லாம் அத்துடன் C என்ற ஏதேனும்ஒரு மாறிலியைச் (arbitrary constant) சேர்த்துக் கூறுவது மரபு.

உதாரணமாக, $\int x^2\, dx = \dfrac{x^3}{3} + C$ என உள்ளது.

2-2 சில தெரிந்த சார்புகளின் தொகைகள்

(1) $\int x^n\, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$

(2) $\int \dfrac{dx}{x} = \log x + C$

(3) $\int e^x\, dx = e^x + C$

(4) $\int \sin mx\, dx = -\dfrac{1}{m} \cos mx + C$

(5) $\int \cos mx\, dx = \dfrac{1}{m} \sin mx + C$

(6) $\sec^2 x\, dx = \tan x + C$

(7) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

(8) $\sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

(9) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(10) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

இத்தொகைகளில் C என்ற ஏதேனும் ஒரு மாறிலி காணப்படுவதால், இத்தொகைகளை 'அளவுபடாத தொகைகள்' (Indefinite Integrals) எனச்சொல்வதுண்டு.

3.3 அளவு படாத தொகைகளின் சில தன்மைகள்.

தேற்றம் 1

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx.$$

நிறுவல் :

$$\int f_1(x)\,dx = F_1(x)$$

$\int f_2(x)\,dx = F_2(x)$ என்க.

$$\therefore F_1'(x) = f_1(x)\ ;\ F_2'(x) = f_2(x)$$

கருதுக :

$$\frac{d}{dx}[F_1(x) + F_2(x)] = F_1'(x)+F_2'(x)$$

$$= f_1(x) + f_2(x)$$

$$\therefore \int [f_1(x) + f_2(x)]\,dx = F_1(x) + F_2(x)$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

தேற்றம் 2

$$\int C f(x)\,dx = C \int f(x)\,dx,$$

இதில் C ஏதேனும் ஒரு மாறிலி.

நிறுவல் :

$\int f(x)\,dx = F(x)$ என்க

$$\therefore \quad F'(x) = f(x)$$

கருதுக :

$$\frac{d}{dx}[CF(x)] = CF'(x)$$

$$= C f(x)$$

$$\therefore \int C f(x)\,dx = C\,F(x)$$
$$= C \int f(x)\,dx$$

மாதிரி :

$$\int (x^3 - 5\sin x + \cos 2x + 8)\,dx$$

என்பதைக் காண்க.

$$\int f(x)\,dx = \int x^3\,dx - 5\int \sin x\,dx + \int \cos 2x\,dx + 8\int 1\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + 5\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + 8x + C$$

மாதிரி :

$$\int \left[x(x^2+1)^2 + \sin x + \frac{1}{x} \right] dx$$

$$= \int \left(x^5 + 2x^3 + x + \sin x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{x^6}{6} + \frac{2x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \cos x + \log x + C$$

பயிற்சி 3-1

கீழ்க் கண்ட தொகைகளைக் காண்க :

(1) $\int 6a^2x^9\,dx$ (2) $\int (ax^5 + bx^3 + cx^2 + 1)\,dx$

(3) $\int e^{2x-3}\,dx$ (4) $\int \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx$

(5) $\int (\sin 3x + \cos x)\,dx$

(6) $\int \left[\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1} \right] dx$

(7) $\int \tan^2 x\,dx$ (8) $\int \cot^2 x\,dx$

(9) $\int (nx)^{\frac{n}{n+1}}\,dx$ (10) $\int (x+1)(x+2)\,dx$

3-4 தொகைகளைக் காணும் சில வழி முறைகள்

சார்புகள் எவ்வளவு சிக்கலாக இருந்தாலும் அவைகளுக்கு வகைக்கெழு காண முடியும். ஆனால் சார்புகளுக்குத் தொகை காணுவது அவ்வளவு சுலபமல்ல. சார்புகள் சில குறிப்பிட்ட உருவத்தில் இருந்தாலோ அல்லது குறிப்பிட்ட உருவத்துக்கு மாற்றக்கூடியனவாக இருந்தாலோ மட்டும்தான் தொகை காணலாம். சில சார்புகளுக்குத் தொகை காணவே முடியாது.

(i) பிரதியிடல் முறை : (Method of Substitution)

$\int f(x)\, dx$ என்பதில் $x = g(t)$ என்ற பிரதியிடல் செய்வதுண்டு. இப்பொழுது தொகை $= \int f[g(t)]\, g'(t)\, dt$ என மாறுகிறது.

சில சமயங்களில் $t = h(x)$ என்ற பிரதியிடல் செய்வதுண்டு. இப்பொழுது $dt = h'(x)\, dx$ என்பதால்,

$$dx = \frac{dt}{h'(x)}$$ என மாற்றம் செய்யப்படும்.

மாதிரி :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$ காண்க.

$x = a \sin t$ என்க $\therefore dx = a \cos t\, dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{a \cos t\, dt}{\sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)}} = \int dt$$

$$= t + C$$

$$= \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

மாதிரி 3-4

$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$ காண்க.

$t = \sin x$ என்க

$dt = \cos x \, dx$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{t} \,.\, dt = \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{6} (\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$$

எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 3-5

$\int \frac{2x \, dx}{1 + x^2}$ காண்க.

$t = 1 + x^2$ என்க

$dt = 2x \, dx$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t}$ என ஆகிறது.

$= \log t + c$

$= \log (1 + x^2) + c.$

பயிற்சி 3-2

கீழ்க் கண்ட தொகைகளைப் பிரதியிடல் முறையில் காணவும் :

(1) $\int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$ (2) $\int \frac{dx}{x \log x}$ (3) $\int \frac{e^x \, dx}{e^x + 1}$

(4) $\int \sin(ax+b)\, dx$ (5) $\int \cos(ax+b)\, dx$

(6) $\int \tan(ax+b)\, dx$ (7) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$

(8) $\int (2x+3)^5\, dx$ (9) $\int \frac{(\sin^{-1}x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(10) $\int \cot x\, dx$ (11) $\int (\log x)^2 \frac{dx}{x}$

(12) $\int \cos^2 x \sin x\, dx$ (13) $\int \tan x \sec^2 x\, dx$

(14) $\int \cos^3 x\, dx$ (15) $\int \sin^2 x \cos 2x\, dx$

(16) $\int \sin^4 x\, dx$ (17) $\int \cos^4 x\, dx$

(18) $\int \cos 3x \sin 2x\, dx$

(ii) பகுதிகளாகப் பிரித்துத் தொகை காணல் (Integration by parts)

u, v இவை x-ன் இரு சார்புகள் என்றால்,

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

எனத் தெரியும்.

$$\text{இதை } u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$$

என எழுதலாம்.

இரு பக்கங்களுக்கும் தொகை காண

$$\int u\left(\frac{dv}{dx}\right) dx = uv - \int v \frac{du}{dx}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதை $\int U\,dV = UV - \int V\,dU$

எனக் குறிப்பதுண்டு.

இதற்குப் பகுதிமுறை தொகை காணல் (Integration by parts) எனப்பெயர்.

மாதிரி 3-6

$\int x e^x dx$. இங்கு x என்பதை U ஆகவும், e^x என்பதை dV ஆகவும் எடுப்போம்.

$\therefore \quad V = \int e^x dx = e^x$ என ஆகும்

$\therefore \quad I = xe^x - \int e^x dx$

$= xe^x - e^x + c$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 3-7

$\int \log x. \quad dx.$

$I = \int \log x.\ 1.\ dx$ என எழுதலாம்

இங்கு $U = \log x$, $dV = 1$ எனக் கருதலாம்

$\therefore \quad V = x$ என ஆகும்.

$\therefore \quad I = (\log x)\, x - \int \frac{1}{x}.\ x\, dx$

$= x \log x - x + c$ எனக் கிடைக்கிறது.

மாதிரி 3-8

$$\int e^{2x} \sin 3x\, dx = \frac{e^{2x}}{13} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x]$$

எனக் காட்டுக.

$I = \int e^{2x} \sin 3x\, dx$ என்க.

பகுதி முறையில்

$$I = -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \int \frac{2e^{2x}}{3}\cos 3x\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \int \frac{2e^{2x}}{3} \cdot \sin 3x\right.$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x - \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}e^{2x}\sin 3x$$

$$I = e^{2x}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x\right] - \frac{4}{9}I$$

எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது $I\left[1+\frac{4}{9}\right] = \frac{e^{2x}}{9}\left[-3\cos 3x + 2\sin 3x\right]$

அல்லது $I = \frac{e^{2x}}{13}\left[2\sin 3x - 3\cos 3x\right]$

மாதிரி 3-9

$\int x^2 \sin x\, dx$ காண்க.

$I = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\, dx$ (பகுதி முறையில்)

$= -x^2\cos x + [\,2x\sin x - \int 2\sin x\, dx\,]$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c.$

பயிற்சி 3-3

பகுதி முறையில் தொகை காணவும் :

1. $\int t^2\cos t\, dt$ 2. $x^2 e^x\, dx$

3. $\int \log(x+1)\, dx$ 4. $\int x e^{-x}\, dx$

5 $\log \sqrt{t}\, dt$ 6. $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

7. $\int \tan^{-1}(t)\, dt$ 8. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

9. $\int \sin 3x\, dx$ 10. $x^3 \log x\, dx$

11. $\int (\tan^{-1} x)\, dx$ 12. $\int \sin^3 d\theta$

13. $\int \cos^3 \theta\, d\theta$ 14. $\int \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

பகுதி D

விடைகள்

பயிற்சி 1 - 1

(i) சார்பு. அரங்கம் X. வீசசெல்லை Y

(ii) சார்பு. அரங்கம் X. வீச்செல்லை Y

(iii) சார்பு அல்ல.

(iv) சார்பு அல்ல

(v) சார்பு அரங்கம்; மெய்யெண் கணம்

2. முடியாது. வீச்செல்லை, முழு எண்களின் கணம்.

பயிற்சி 1 - 2

1. $4x^2 + 1$. மற்றும் $(4x + 1)^2$

2. (i) 1 (ii) 343

3. $(3^x)^2 + 7$

பயிற்சி 1 - 3

(1) $\frac{?}{?}$ (2) $h^{-1}(B) = \{x; -\frac{1}{3} < x < 0\}$

பயிற்சி 1 - 5

(1) $\frac{57}{18}$ (2) 2 (3) 0 (4) 0 (5) 6 (6) 2 (7) 51 (8) 1.

பயிற்சி 1 - 6

(1) 1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$ (5) 1 (6) 0.

பயிற்சி 2 - 1

(1) (i) -1 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 6.

(2) (i) 19 (ii) $\frac{9}{2}$ (iii) 25.

பயிற்சி 2 - 2

(2) (i) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ (ii) $12x^2 + 6x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(iii) $-\frac{5}{2}\frac{1}{x^{\frac{7}{2}}}$ (iv) $\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (v) $\frac{2(x^4-1)}{x^3}$

(4) 160π க செ.மீ/விநாடி. (5) .04 க. செமீ/விநாடி.

பயிற்சி 2 - 3

(1) $a(x+b)(3x-b)$ (2) $3x^2 + \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$

(3) $3x^2 + 2x$ (4) $6\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

(5) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (6) $2\sec^2 x \tan x$

(7) $-\operatorname{cosec}^2 x\,[3\operatorname{cosec}^2 x - 2]$ (8) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

(9) $\dfrac{2(x-1)}{x+3}$ (10) $\dfrac{x^2-2x-5}{(x-1)^2}$

(11) $\dfrac{-x^3+2x^2+1}{(x^3+1)^2}$ (12) $\dfrac{\sin x\,(\cos^2 x+1)}{\cos^2 x}$

(13) $-\cot x\ \operatorname{cosec} x$ (14) $\sec^2 x$

(15) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (16) $-\cot x\operatorname{cosec} x$

(17) $-\operatorname{cosec}^2 x$

(18) (a) துவக்க வேகம் $= 1$

துவக்க முடுக்கம் $= 2$

(b) துவக்க வேகம் $= \frac{1}{2}$

துவக்க முடுக்கம் $= -\frac{1}{2}$

(c) துவக்க வேகம் $= -2$

துவக்க முடுக்கம் $= -4$

பயிற்சி 2 - 4

(1) $2x\cos 4x - 4x^2\sin 4x$ (2) $\dfrac{5x^5+16x^3}{(x^4+4)^{\frac{1}{2}}}$

(3) $3(2ax+b)(ax^2+bx+c)$ (4) $-\dfrac{\cos(x^{\frac{1}{2}})\sin(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}}$

(5) $\dfrac{-3\cos x\,(\sin^2 x+1)}{\sin^2 x}$ (6) $2x\sec^2(x^2)$

பயிற்சி 2 - 6

(1) (a) $= \dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$ (b) $\dfrac{3x^2}{1+(1+x^3)^2}$

(c) $\dfrac{a}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$ (d) $\dfrac{a}{ax+b}$

(e) $2xe^{x^2}$ (f) $\cos x\ e^{\sin x}$

(g) $(2ax+b)e^{ax^2+bx+c}$ (h) a

(i) $\dfrac{2\ (3x+2)}{3x^2+4x-1}$ (j) $-\tan x$ (k) $\dfrac{1}{\sin x \cos x}$

(2) (i) $\dfrac{3x^4(-11x^4+16x^3+7x-10)}{2\ (3-2x)^{\frac{3}{2}}}$

(ii) $\dfrac{3x\ (x^2-1)^{\frac{1}{2}}\ (5x^3-x^2+6)}{5\ (x^3+1)^{\frac{6}{5}}}$

(iii) $\dfrac{\left[(e^x-1)\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}-e^x \log\ (\sec x)\right]}{(e^x-1)^2}$

பயிற்சி 2 - 8

(i) $y=0$ மற்றும் $x=1$

(ii) $2x-y+3=0$ மற்றும் $x+2y-6=0$

(iii) $x-4y+1=0$ மற்றும் $8x+2y-7=0$

(iv) $x+9y-6=0$ மற்றும் $27x-8y-80=0$

(v) $y=0$ மற்றும் $x=1$

(vi) $6x-y+3=0$ மற்றும் $x+6y-55=0$

பயிற்சி 2 - 9

(1) (i) $\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ (ii) $\dfrac{2x(3x^3-x+3)}{3(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}$

(iii) $8x\cos 2x+2\sin 2x(1-2x)$

(2) (i) $\dfrac{15}{64}x^{-\frac{9}{4}}$ (ii) $-e^x(26\sin 3x+18\cos 3x)$

(iii) $\dfrac{2(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$

(3) (i) $(-1)^{n-1}\dfrac{1.3.5......(2n-3)}{2^n}x^{\frac{1-2n}{2}}$

(ii) $2e^{2x-3}$

பயிற்சி 3 - 1

(பயிற்சிகள் 3-1, 3-2, 3-3-ல் உள்ள விடைகளுடன் c என்ற மாறிலியைச் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டும்.)

(1) $\dfrac{3a^2x^{10}}{5}$ (2) $\dfrac{a}{6}x^6+\dfrac{b}{4}x^4+\dfrac{c}{3}x^3+x$

(3) $\frac{1}{2}e^{2x-3}$ (4) $x^2+\log x$ (5) $-\frac{1}{3}\cos 3x+\sin x$

(6) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}(x+1)^{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

(7) $\tan x - x$ (8) $-\cot x - x$

(9) $\frac{n+1}{2n+1}$ $(n)^{\frac{n}{n+1}}$ $x^{-\frac{2n+1}{n+1}}$

(10) $\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x$

பயிற்சி 3 - 2

(1) $\log(\sin x)$ (2) $\log \log x)$

(3) $\log e^x + 1$ (4) $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

(5) $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$ (6) $-\frac{1}{a}\log[\cos(ax+b)]$

(7) $\sqrt{1+x^2}$ (8) $\frac{(2x+3)^6}{12}$ (9) $\frac{(\sin^{-1}x)^3}{3}$

(10) $\log(\sin x)$ 11) $\frac{1}{3}(\log x)^3$ (12) $\frac{\cos^3 x}{3}$

(13) $\frac{1}{2}\tan^2 x$ (14) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$ (15) $\frac{1}{4}\left[\frac{\frac{x}{2} - \sin 4x}{8}\right]$

(16) $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$

(17) $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$

(18) $\frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10}$

பயிற்சி 3 - 3

(1) $\sin t\,(t^2-2) + 2t\cos t$

(2) $e^x(x^2 - 2x + 2)$

(3) $(x+1)\log(x+1) - x$ (4) $e^{-x}(1+x)$

(5) $t \log \sqrt{t} - \frac{t}{2}$

(6) $\frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1)$

(7) $t \tan^{-1} t - \frac{1}{2} \log (1 + t^2)$

(8) $-\sqrt{9 - x^2}$ (9) $\frac{1}{9} \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x$

(10) $\frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^4}{16}$ (11) $\frac{1}{2} [(x^2 + 1) \tan^{-1} x - x]$

(12) $- \left[\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]$

(13) $\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3}$

(14) $\frac{(\cos^{-1} x)^2}{2}$

பகுதி E

கணிதத் தருக்க முறை

(Mathematical Logic)

முன்னுரை

தருக்க முறையைக் காரண காரியங்களை உய்த்துணரும் கருத்துகளைப் பற்றிய அறிவியல் என்று வரையறுக்கலாம்.

பண்டைய கிரேக்கர்கள்—குறிப்பாக அரிஸ்டாட்டில்—தருக்க முறையை ஒரு தனிப்பட்ட அறிவுத்துறையாக அமைத்தனர். 19 ஆம் நூற்றாண்டில் வாழ்ந்த சில கணித விற்பன்னர்கள் தேற்றங்களை நிரூபிப்பதற்காகக் காரண காரிய முறைகளை நுணுகி ஆய்ந்தனர். இதன் பயனாகத் தருக்க முறை மறுநோக்குடன் விரிவு படுத்தும் அறிவுத்துறையாக வளரத் தலைப்பட்டது. ஜார்ஜ் பூல் (1815—1864) என்பார் முறை சார்ந்த தருக்க முறையை விரிவாக்கினார். மேலும், 'பூலீயன் இயற்கணிதம்' என்ற இயற் கணிதத்தைத் தருக்க முறையில் புகுத்தினார். இவ்வாறாகக் குறியீடுகளை உடைய தருக்கமுறை அல்லது கணிதத் தருக்க முறை என்பது தோன்றியது. இது கணிதக் கருத்துகளை ஐயந்திரிபற வலியுறுத்துவதற்கான அடிப்படையைக் கொடுத்ததுடன் கணிப்பிகளின் அமைப்பிற்கும் வழிகோலிற்று.

நம் அன்றாட வாழ்வில் கடந்த கால அனுபவங்களைக் கொண்டு, பின்னர் யாது நிகழப் போகின்றது என்று யூகிக்கிறோம். எடுத்துக்காட்டாக, மேகங்கள் சூழ்ந்திருந்தால் மழையை நாம் எதிர்பார்க்கின்றோம். இவ்வாறான கடந்த கால அனுபவங்களைக் கொண்டு முடிவிற்கு வரும் முறையை 'விதி வருக்கு முறைக் காரணீயம்' (inductive logic) என்கின்றோம்.

மேற்கூறியதற்கு மாறாக, ஏற்கெனவே சில முடிவுகளை நாம் ஒப்புக்கொண்டதாகக் கொண்டால், இந்த ஒப்புக்கொண்ட முடிவு

களைக் கொண்டு சில புதிய முடிவுகளைப் பெற இயலும். பித்தாகரசு தேற்றத்தை மெய்யென நாம் ஒப்புக்கொள்வோம் எனில், 4.5 செ.மீ., 6 செ.மீ., 1.5 செ.மீ. அளவுகளைப் பக்கங்களாக உடைய முக்கோணம் ஒரு செங்கோண முக்கோணம் என்ற முடிவிற்கு வருகின்றோமல்லவா? இம்மாதிரியான காரணீய முறை 'விதி விளக்கும் முறைக் காரணீயம்'(deductive logic) எனப்படும்.

ஈண்டு தருக்க முறையின் சில அடிப்படைக் கருத்துகளை அறிமுகப்படுத்துவோம். எவ்வாறு அவை கணிதக் கூற்றுகளை நிரூபிப்பதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன என்பதைக் காண்போம்.

கூற்றுகள் :

மெய்யா அல்லது மெய்யற்றதா என்று தீர்மானிக்க முடிந்த வாக்கியங்கள் அனைத்தும் கூற்றுகளாம்.

பின்வரும் வாக்கியங்களை நோக்குக :

p : தமிழ் நாட்டின் தலைநகர் சென்னை.

q : $2+3=5$.

r : 7 ஓர் இரட்டை எண்.

s : $x=2$ எனில் அப்பொழுது $x^2=-4$

t : தயை செய்து அமர்க.

u : உங்கள் வயது என்ன?

v : $3+x=8$.

p, q என்ற வாக்கியங்கள் மெய். r, s என்ற வாக்கியங்கள் மெய்யற்றவை. ஆனால் t, u என்ற வாக்கியங்கள் மெய்யா அன்றி மெய்யற்றவையா என்று தீர்மானிக்க இயலவில்லை. எனவே p, q, r, s என்பன கூற்றுகள். t, u என்பன கூற்றுகள் அல்ல.

v-ஆனது, 'x-உடன் 3ஐக் கூட்ட 8 கிடைக்கின்றது.' என்பதாம். இவ்வாக்கியம் $x=5$ என்று இருக்கும்போது மெய்யாகின்றது. இம்மதிப்பைத் தவிர்த்த வேறு எம்மதிப்பிற்கும் இது மெய்யற்றதாகின்றது. இருப்பினும், எப்பொழுதும் இவ்வாக்கியம் மெய்யா? மெய்யற்றதா? என்று கூற இயலுமாதலின் இது கூற்றாகும். இவ்வாறன, பொதுவாக மெய்யா? மெய்யற்றதா? என்று கூற முடியாத, ஆனால் ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் மெய்யா

மெய்யற்றதா என்று கூற இயலுமான வாக்கியங்களைத் திறந்த வாக்கியங்கள் என்று வகைப்படுத்தலாம். திறந்த வாக்கியமற்ற, எல்லாக் கூற்றுகளும் மூடிய வாக்கியங்கள் என்று அழைக்கப் படும்.

ஒரு கூற்றின் மெய் அல்லது மெய்யற்ற தன்மையை அக் கூற்றின் மெய்ம்மை மதிப்பீடு என்றழைக்கப் பெறும். ஒவ்வொரு கூற்றும் ஒரு மெய்ம்மை மதிப்பீடு உடையதாகும் ; மெய்யெனில் T என்றும், மெய்யற்றதெனில் F என்றும் குறிக்கப் பெறும் இவற்றை மெய்மைப் பட்டியலில் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

கூற்று
T
F

நாம் முன்னர்க் கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் p-ஆனது T என்ற மெய்ம்மை மதிப்பீடும், r ஆனது F என்ற மெய்ம்மை மதிப் பீடும் உடையனவாகும்.

கொடுக்கப்பெற்றுள்ள கூற்றுகளை நாம் இணைத்தோ அல்லது அவற்றின் எதிர்மறைக் கூற்றுகளை அமைத்தோ புதிய கூற்றுகளை அமைக்கலாம்.

எதிர்மறைக் கூற்றுகள்

ஒவ்வொரு கூற்று p-உடன், $\sim p$ அல்லது $\bar{p}$ என்ற எதிர் மறைக் கூற்றைத் தொடர்புபடுத்தலாம். இதன் மெய்ம்மைப் பட்டியல் பின்வருமாறு அமையும்.

p	$\sim p$
T	F
F	T

இதன் பொருள் : 'p' என்பது மெய்யெனில் 'p அல்ல' என்பது மெய்யற்றது. 'p' என்பது மெய்யற்றதெனில் 'p அல்ல' என்பது மெய்யாகும். 'p-அல்ல' என்ற கூற்றுக்கு $\sim p$ அல்லது $\bar{p}$ என்ற குறியீடுகளைப் பயன்படுத்துகின்றோம்.

விளக்கம் :

பின்வரும் நான்கு கூற்றுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

(1) p : சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது.

$\sim p$: சென்னை இந்தியாவில் இல்லை

அல்லது

சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது என்பது மெய்யல்ல.

(2) q: $2+3 - 6$

$\sim q$: $2+3=6$ என்பது மெய்யல்ல. அல்லது $2+3\neq 6$

(1) p மெய்; எனவே $\sim p$ மெய்யற்றது.

(2) q மெய்யற்றது. எனவே $\sim q$ மெய்.

ஒட்டு இணைப்பு :

p, மேலும் q என்ற வகையில் அமைந்துள்ள கலவைக் கூற்றுகளை இனிக் காண்போம். 'p மேலும் q' என்பதற்குப் பின்வருமாறு மெய்ம்மை மதிப்பீட்டைக் கொடுக்கின்றோம். 'p மேலும் q' என்பது, 'p', 'q' என்ற இரண்டுமே மெய்யாகும் போதுதான் மெய்யாகும். இந்த ஒட்டு இணைப்பை $p\wedge q$ [வேறு சில குறியீடுகளாவன : pq; p மேலும் q] என்ற குறியீட்டால் நாம் குறிக்கிறோம். $p\wedge q$ என்பதை 'p மேலும் q' என்று படிப்பது வழக்கம்.

p, q என்ற இரு கூற்றுகளின் ஒட்டு இணைப்பு, $p\wedge q$ என்பது ஒரு கூற்றாகும். நம்மால் இயன்ற நான்கு மெய்ம்மை மதிப்பீடு களின் பட்டியலைப் பின்வரும் பட்டியலில் காண்க.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

இந்த அட்டவணையில் உள்ள முதலிரண்டு நிரல்களும் p, q என்ற இரு கூற்றுகளின் மெய்ம்மை மதிப்பீடுகளையும், மூன்றும் நிரல் கலவை வாக்கியத்தின் மெய்ம்மை மதிப்பீடுகளையும் கொடுக்கின்றன.

விளக்கம் :

பின்வரும் நான்கு கூற்றுகளையும் கவனிக்கவும்.

p : சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது; மேலும் $2+3=5$

q : சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது; மேலும் $2+3=6$

r : சென்னை பின்லாந்தில் உள்ளது; மேலும் $2+3=5$

s : சென்னை பின்லாந்தில் உள்ளது; மேலும் $2+3=6$

முதல் கலவைக் கூற்று மட்டுமே மெய்யாகும். ஏனைய கூற்றுகள் யாவும் மெய்யற்றவை. ஏனெனில், குறைந்தது ஒரு துணை வாக்கியமாவது மெய்யற்றதாக உள்ளது.

விட்டு இணைப்பு :

'அல்லது' என்ற சொல்லை இலக்கண இணைப்புச் சொல்லாகப் பயன்படுத்துவோம். எனில் பிறிது விளக்கிய

பொருளிலோ அல்லது உள்ளடக்கிய பொருளிலோ பயன் படுத்துகின்றோம். 'p அல்லது q' என்ற கலவை வாக்கியத்தில் 'அல்லது' என்ற இணைப்புச் சொல்லை உள்ளடக்கிய பொருளில் நாம் பயன்படுத்துகின்றோம்.

p, q ஆகிய இரண்டுமே மெய்யற்றவை எனில்தான் 'p அல்லது q' என்ற கூற்று மெய்யற்றதாகும் எனக் கொள்கின்றோம். 'p அல்லது q' என்பதை $p \vee q$ என்று குறியீட்டில் குறிக்கின்றோம். இதனை 'p அல்லது q', '$p+q$' என்று வேறு இரு முறைகளிலும் குறிக்கும் வழக்கமும் உண்டு என்பதை அறிக.

p அல்லது q என்ற விட்டு இணைப்பு ஒரு கலவை வாக்கியமாகும் $(p \vee q)$. நான்கு மெய்மை மதிப்பீடுகளையும் பின்வரும் அட்டவணை இயம்புகின்றது.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

விளக்கம் :

பின்வரும் நான்கு கூற்றுகளையும் நோக்குக.

p : சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது, அல்லது 2 + 3 = 5.

q : சென்னை இந்தியாவில் உள்ளது, அல்லது 2 + 3 = 6.

r : சென்னை பின்லாந்தில் உள்ளது, அல்லது 2 + 3 = 5.

s , சென்னை பின்லாந்தில் உள்ளது, அல்லது 2 + 3 = 6.

's' என்பது மட்டுமே மெய்யற்றதாகும். எஞ்சியன யாவும்

மெய்யே. ஏனெனில், குறைந்தது ஒரு துணை வாக்கியமாவது மெய்யாக உள்ளது.

ஒருவழிச் சுட்டு :

p, q என்ற இரு கூற்றுகள் 'p எனில், அப்பொழுது' என்று இணைக்கப்பெறுமாயின் இதை 'ஒருவழிச் சுட்டு' அல்லது 'நிபந்தனை' என்று அழைப்பர். இதை $p \rightarrow q$ என்று குறியீட்டில் குறிப்பது வழக்கம்.

$p \rightarrow q$ என்பதைப் பின்வரும் அமைப்புகளில் ஏதேனும் ஒரு முறையில் படிக்கலாம்:

p எனில் அப்பொழுது q

p ஆனது q ஐ விளைவிக்கின்றது

q, p எனில்

p எனில் மட்டுமே q

p ஆனது q-விற்குப் போதுமான நிபந்தனை

q ஆனது p-க்குத் தேவையான நிபந்தனை.

$p \rightarrow q$ என்பதை மெய்ம்மை அட்டவணையில் குறிக்கும்பொழுது p மெய்யாகவும், q மெய்யற்றதாகவும் இருக்கும்பொழுது மட்டுமே மெய்யற்றதாக எடுத்துக் கொள்கின்றோம்.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p ஐக் கொள் வாக்கியம் எனவும், q-வை விளைவு வாக்கியம் எனவும் அழைப்பர். நாம் இங்குக் கூற்றுகளை அலசி ஆராய வில்லை. அவற்றில் உள்ளவை நமக்கு ஒரு பொருட்டன்று. நம்மிடமுள்ள தகவல்கள் காரணீய மதிப்பீடு மட்டுமே உள்ளவை. மேலும், இங்கு வரையறை செய்யப்பட்ட ஒருவழிச் சுட்டு விளைவு களுக்கும், அவற்றின் 'முடிவுகளுக்கும் இடையே உள்ள உறவையோ அல்லது p-லிருந்து q-ஐ நிரூபிக்கவோ முயல்வது ஆகாது. பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இவ்விளக்கத்தைத் தெளிவுறச் செய்யும்.

1. p = ஒரு முக்கோணத்திற்கு மூன்று பக்கங்கள்.

   q : $2^{10247} - 1$ என்பது ஒரு பகா எண்.

   $p \to q$ ஆனது q ன் மெய்ம்மை மதிப்பீட்டையே (T) கொண்டதாகும்.

2. p : $2 + 2 = 5$

   q : 12 ஒரு பகா எண்.

   $p \to q$ மெய் (T)

3. p : ஒரு முக்கோணத்திற்கு நான்கு பக்கங்கள் உண்டு.

   q : 17 ஒரு பகா எண்.

   $p \to q$ என்பது மெய் (T).

4. p: 17 ஒரு பகா எண்,

   q: 16 ஒரு பகா எண்.

   $p \to q$ என்பது மெய்யற்றது (F)

இருவழிச் சுட்டு :

$q \to p$ என்ற ஒருவழிச் சுட்டை நாம் $p \to q$ என்ற ஒரு வழிச் சுட்டின் மறுதலை என்கின்றோம். ($p \to q$ என்பது $q \to p$ ன

மறுதலையுமாகும்). ஓர் ஒருவழிச் சுட்டின் மறுதலை மெய்யாக இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை. பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுகளை நன்கு கவனியுங்கள்:

(a) *ஒருவழிச் சுட்டு:* $n > 0$ எனில், அப்பொழுது $n^3 > 0$ மெய்.

மறுதலை: $n^3 > 0$ எனில், அப்பொழுது, $n > 0$. மெய்.

(b) *ஒருவழிச் சுட்டு:* இராமன் சென்னையில் வசிக்கின்றான் எனில், அப்பொழுது அவன் இந்தியாவில் வசிக்கின்றான். (T)

மறுதலை: இராமன் இந்தியாவில் வசிக்கின்றான் எனில், அப்பொழுது அவன் சென்னையில் வசிக்கின்றான். (F)

ஒருவழிச் சுட்டும் அதன் மறுதலையும் மெய்யெனில் நமக்கு இருவழிக் சுட்டு கிடைக்கின்றது.

"p எனில் q, மேலும் q எனில் p" என்ற வடிவிலுள்ள கூற்றை இருவழிச் சுட்டு என்போம். இதை $p \leftrightarrow q$ என்று எழுதுவோம். இஃது இரண்டு ஒருவழிச் சுட்டுக் கூற்றுகளாகும் அதாவது, $p \rightarrow q$ மேலும் $q \rightarrow p$ ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக,

"$2x = 16 \leftrightarrow x = 8$" என்பதன் பொருள்,

'$2x = 16$ எனில் அப்பொழுது $x = 8$' மேலும்

'$x = 8$ எனில் அப்பொழுது $2x = 16$'

$p \leftrightarrow q$ ஐ வரையறை செய்யும் மெய்ம்மை அட்டவணையைக் கீழே கொடுத்துள்ளோம்.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \leftrightarrow q$ ஆனது p-க்கும் q-க்கும் ஒரே மாதிரியான மெய்ம்மை மதிப்பீடு இருந்தால் மாத்திரமே மெய்யாகின்றது என்பதை அறிக. இல்லையெனில் மெய்யற்றதாகும். $p \leftrightarrow q$ எனில் p ஆனது q-க்கு மூற்றொருமை என்றோ, p ஆனது q-க்குப் போதுமானதும் தேவையானதுமான நிபந்தனை என்றோ நாம் கூறுகின்றோம்,

கூற்றுகள் :

'இன்று மழை பெய்து விடுமுறை அளிக்கப்பட்டதென்றால், நான் படக் காட்சிக்குச் செல்வேன் அல்லது என் நண்பனைக் காண்பேன்' என்ற கூற்றை எடுத்துக் கொள்வோம். இஃது ஒரு கலவை வாக்கியம் ஆகும். இது (i) இன்று மழை பெய்யும் (ii) இன்று விடுமுறை அளிக்கப்படும் (iii) நான் படக்காட்சிக்குச் செல்வேன் (iv) என் நண்பனைக் காண்பேன் ஆகிய நான்கு வாக்கியங்களின் சேர்க்கையாகும்.

காரணீய இணைப்புச் சொற்களைத் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்திக் கலவை வாக்கியத்தை (Compound Statement) அமைக்கலாம். கலவை வாக்கியங்களைக் *கூற்றுகள்* (Propositions) என்றும், துணை வாக்கியங்களை *மாறிகள்* என்றும் கூறுவர்.

ஒரு கூற்றின் மெய்ம்மை நிலை அதன் மாறிகளின் மெய்ம்மை நிலைகளை ஒட்டியே அமையும். இரு கூற்றுகள் ஒவ்வொரு நிலையிலும் ஒரே மாதிரி மெய்ம்மை நிலைகள் உடையனவாயிருப்பின், அவற்றைக் காரணீய முறைப்படிச் சமானமாக உள்ளன என்பர். அப்படிப்பட்ட சமானத் தன்மையை '≡' என்ற குறியீடு மூலம் குறிப்பர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ என்று நிறுவுக.

தீர்வு :

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

$p \rightarrow q$ ன் மெய்ம்மை அட்டவணையும், $\sim q \rightarrow \sim p$ ன் மெய்ம்மை அட்டவணையும் சமானத் தன்மையை நிரூபிக்கின்றன.

குறிப்பு

$\sim q \rightarrow \sim p$ என்பதை $p \rightarrow q$ என்பதன் எதிர்மறை மறுதலை என்பர்.

எடுத்துக்காட்டு :

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ என்று காட்டுக.

தீர்வு :

$p \leftrightarrow q$-ன் மெய்ம்மை அட்டவணை பின்வருமாறாகும்.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

இனி $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$-ன் மெய்ம்மை அட்டவணையை அமைப்போம்.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

இரண்டும் ஒரே மெய்ம்மை மதிப்பீடுகளை உடையனவாக உள்ளன.

$$\therefore \quad p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

நிரூபண முறைகள் :

ஒரு கூற்றை நிரூபிக்க விதிவிளக்க முறைப்படி ஒட்டிய முறையை இங்குச் சற்றுக் காண்போம்.

p என்ற கூற்று மெய்யாகும் பொழுதெல்லாம் q-ம் மெய்யெனில், p என்ற கூற்று காரணீய முறைப்படி q ஐ ஒரு வழிச் சுட்டுகின்றது என்பர். இதை $p \Longrightarrow q$ என்று குறிப்பது வழக்கம். (இதை $p \rightarrow q$ என்பதுடன் குழப்பிக்கொள்ளக் கூடாது.)

எடுத்துக்காட்டு :

$p \leftrightarrow q$ என்பது $p \rightarrow q$ ஐக் காரணீய முறைப்படி ஒரு வழிச் சுட்டாகும் என்று காட்டுக.

தீர்வு :

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$
T	T	T	
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	T	T

இவ்வட்டவணையிலிருந்து $p \leftrightarrow q$ என்பது எப்பொழுதெல்லாம் மெய்யோ அப்பொழுதெல்லாம் $p \rightarrow q$ மெய்யென்று காண்கின்றோம்.

$$\therefore \quad p \leftrightarrow q \Longrightarrow p \rightarrow q.$$

ஒரு வாதம் என்பது கொடுக்கப்பெற்றுள்ள $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ என்றழைககப்பெறும் கொள்வாக்கியங்கள் q என்றழைக்கப் பெறும் விளைவை உடையதாகும். $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \Longrightarrow q$ எனில், அப்பொழுது நாம் உயத்துணர்ந்த வாதமானது செல்லுபடியாகின்றது. வாதம் செல்லுபடியாகவில்லை எனில், அஃது ஒரு வாதவழு ஆகும். சுருங்கக் கூறுமிடத்து, ***கொள்வாக்கியங்கள் எல்லாம் மெய்யாக இருக்கும்போது, விளைவாக்கியமும் மெய் யாக அமையுமானால் ஒரு வாதம் செல்லுபடியாகின்றது.***

காரணீய முறைப்படி உய்த்துணருவதன் அடிப்படையான, செல்லுபடியாகின்ற இரு வாதங்களைக் கீழே கொடுத்துள்ளோம்:

(i) $p \rightarrow q$ மேலும் $q \rightarrow r$ என்பன மெய்யெனில் $p \rightarrow r$ என்பதும் மெய்யே.

(ii) $p \rightarrow q$ என்ற வடிவிலுள்ள கூற்று மெய்யென்று கொள்வோம். மேலும் p என்பது மெய்யென்று நமக்குத் தெரியும் எனில் அப்பொழுது q-ஆனது உறுதியாக மெய்யாகும்.

பொதுவாக, நிரூபிக்கும் முறையானது வாதங்களின் தொடர்ச்சியைக் கொண்டுள்ளது.

***நேர்முக நிரூபணம்* :**

H என்ற கூற்று மெய்யெனக் கொடுக்கப் பெற்று, தேற்றம் C ஆனது மெய்யென்று நிரூபிக்க வேண்டும் எனக் கொள்க. இதன் தொடர்ச்சியைக் கொள்க.

நாம் H ஆனது காரணீய முறைப்படி Cஐ ஒருவழிச் சுட்டுகிறது என்று நிரூபிக்க வேண்டும் என்று பொருள்படுகின்றது. அதாவது $H \Longrightarrow C$; அப்பொழுது H மெய்யெனில் C மெய்யாக அமையும். $H \Longrightarrow C$ என்பதை ஒரே மூச்சில் மெய்யென்று நிரூபிக்க இயலவில்லையெனில் $H \Longrightarrow C_1$, $C_1 \Longrightarrow C_2$, $C_2 \Longrightarrow C_3$, $\ldots$, $C_{R-1} \Longrightarrow C_R$ மேலும் $C_R \Longrightarrow C$ என்று தொடர் சங்கிலிபோலச் சேர்த்து $H \Longrightarrow C$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

'ஓர் ஒற்றை எண்ணின் வர்க்கம் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்' என நிரூபிக்கவும்.

அதாவது '$\forall x$, x என்பது ஓர் ஒற்றை எண் $\Longrightarrow x^2$ என்பது ஓர் ஒற்றை எண்.

('$\forall x$, என்பதை எல்லா x-க்கும்' என்று படிப்பது வழக்கம்.)

தீர்வு : H : x ஓர் ஒற்றை எண்.

C_1 : x என்பதை $2a+1$, $a \in Z$ (ஒற்றை எண்ணின் வரையறை) என்று எழுதலாம்.

C_2 : $x^2 = (2a+1)^2$

$= 4a^2+4a+1$ (இயற் கணிதத் தேற்றம்)

C_3 : $4a^2+4a+1$ இது இரண்டால் மீதியின்றி வகுபடாது. [எண்களின் வகுபடு தன்மை]

C_4 : x^2 என்பது 2ஆல் மீதியின்றி வகுபடாது.

[ஒற்றை எண்களின் வரையறை]

C : x^2 ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

மறைமுக நிரூபணம் :

ஒரு கூற்றை நேரடியாக மெய்யென்று நிரூபிக்க முடியவில்லை எனில், வேறு சில வழிகளைக் கையாளலாம்.

'p-அல்ல' என்பது மெய்யற்றதெனில் p என்பது மெய்யாகும். இதையடைய, 'p அல்ல' என்பதை மெய்யென்று கொள்கின்றோம். இதை, நமக்குக் கொடுக்கப்பெற்றுள்ள வாக்கியங்களின் பட்டியலுடன் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டும். பின்னர் இந்தப் பட்டியலிலிருந்து நாம் அடையும் ஏதாவது ஒரு முடிவு

கொடுக்கப்பட்ட ஏதாவது ஒரு வாக்கியத்திற்கு முரண்பாடாக இருந்தால், $\sim p$ என்பது தவறாகும். ஆகவே, p என்பது மெய் என்ற முடிவிற்கு வருகின்றோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

'$\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறா எண்' என நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு :

"'$\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்' என்பது மெய்யல்ல" என்று கொள்வோம். இதன் எதிர்மறைக் கூற்றை மெய்யற்றது என்று நிரூபித்தால் போதுமானது. '$\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண்' என்பது மெய் என்க. இப்பொழுது, $\sqrt{2}$ என்பது $\frac{p}{q}$ வடிவில் உள்ளது. (p, q என்பவை சார்பகா எண்களாகும்.)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

$\Longrightarrow \quad 2 = \frac{p^2}{q^2}$

$\Longrightarrow \quad p^2 = 2q^2$ ...(1)

$\Longrightarrow \quad p^2$ என்பது ஓர் இரட்டை எண்.

$\Longrightarrow \quad p$ என்பது ஓர் இரட்டை எண். ...(2)

$\Longrightarrow \quad p = 2k$ (இங்கு $k \in Z$)

$\Longrightarrow \quad (2k^2) = 2q^2$ [(1)-ன்படி]

$\Longrightarrow \quad 4k^2 = 2q^2$

$\Longrightarrow \quad q^2 = 2k^2$

$\Longrightarrow$ q^2 ஓர் இரட்டை எண்.

$\Longrightarrow$ q ஓர் இரட்டை எண். ...(3)

$\Longrightarrow$ p, q இரட்டை எண்கள். எனவே, அவை சார்பகா எண்கள் ஆகா. [(2), (3) ஆகியவற்றின்படி]

இது, நாம் கொண்ட, 'p, q என்பன சார்பகா எண்கள்' என்ற கொள்கைக்கு முரணுகின்றது. எனவே, $\sqrt{2}$ என்பது ஒரு விகிதமுறு எண் என்று நாம் கொண்ட கொள்கை மெய்யற்றதாகின்றது.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுரு எண்ணுகும்.

மறுப்பு நிரூபணம் :

கொடுக்கப்பட்ட கூற்றை ஓர் ஊகமாக (conjecture) எடுத்துக்கொண்டு அதை முதலில் நிரூபிக்க முயல்கின்ருேம். நாம் வெற்றியடைய முடியவில்லையெனில் அந்த ஊகம் சரியா என்பது நமக்கு உறுதியாகத் தெரிவதில்லை. எனவே, அதைத் தவறு என நிரூபிக்க நாம் முயல்கின்ருேம்.

(a) *முரண்பாட்டைக் கொண்டு மறுப்பு நிரூபண முறை :*

இம்முறையில் கொடுக்கப்பெற்ற வாக்கியத்தை மெய்யென்று கொண்டு அதனின்று முடிவுகளை அடைகின்ருேம். அவ்வாறு அடைந்த முடிவு, நமக்குத் தெரிந்த ஒரு மெய்க் கூற்றுடன் முரண்பாடாக அமையுமெனில் கொடுக்கப்பெற்ற வாக்கியம் மெய்யற்றதாகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு :

"ஒவ்வோர் ஒற்றை எண்ணின் வர்க்கமும் ஓர் இரட்டை எண்ணுகும்" என்ற வாக்கியம் மெய்யற்றதெனக் காட்டுக.

தீர்வு :

ஓர் ஒற்றை எண்ணின் பொது வடிவம் $2n+1$. ஓர் இரட்டை எண்ணின் பொது வடிவம் $2n$.

இங்கு $n \in Z$

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாக்கியமானது

$(2n+1)^2 = 2m \quad (m \in Z)$

$\Longrightarrow 4n^2 + 4n + 1 = 2m$

$\Longrightarrow$ இடக்கைப்புறம் 2ஆல் மீதியின்றி வகுபடாது. ஆனல் வலக்கைபபுறம் 2ஆல் மீதியின்றி வகுபடும்.

$\Longrightarrow$ ஓர் ஒற்றை எண், ஓர் இரடடை எண்ணுக்குச் சமமாகின்றது. இ∴து ஒரு முரண்பாடு. எனவே, நமது ஊகம் மெய்யற்றது.

மறுப்பு உதாரணம் கொடுத்து மறுப்பு நிரூபணமளிக்கும் முறை :

'ஒவ்வோர் ஒற்றை எண்ணின் வர்க்கமும் ஓர் இரட்டை எண்' என்ற வாக்கியத்தை மெய்யற்றதாக்க வேண்டுமெனக் கொள்வோம். நாம் ஒரே ஒரு மறுப்பு உதாரணம் கொடுப்பதற்கு முயன்ருல் போதும்.

$3^2 = 9$ என்ற ஒரு மறுப்பு உதாரணம் நமககுக் கிடைக்கின்றது. இந்த மறுப்பு உதாரணம் ஒன்றே, அக கூற்றை மெய்யற்றதென்று நிரூபிக்கப் போதுமானது. எனவே, மறுப்பு உதாரணம், ஒரு கூற்றை மெய்யற்றதென்று நிரூபிக்க மிகப் பயனுள்ள ஒரு சாதனமாகும்.

பயிற்சி

1. பின்வரும் வாக்கியஙகளில் எவை கூற்றுகள்?

(a) நிலா மிக்க ஒளியுடன் ஒளிர்கின்றது.

(b) நாய்கள் அறிவுள்ளவை.

(c) இன்று நீ எவ்வாறு உள்ளாய்?

(d) $7 + 3 = 6$

(e) அமைதியாக இருங்கள்.

(f) 21 ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

(2) p = குமார் உயரமானவன்;

q = முத்து குட்டையானவன்;

['குட்டை' என்பதை 'உயரமானவன் அல்ல' என்ற பொருளில் பயன்படுத்துகின்றோம்.] கொடுக்கப் பெற்றுள்ள இவ் வாக்கியங்களைக் கொண்டு பின்வரும் வாக்கியங்களைக் குறியீடுகளைப் பயன்படுத்தி எழுதுக.

(a) குமார் குட்டையானவன், மேலும் முத்து உயரமானவன்.

(b) குமாரும் முத்தும் ஆகிய இருவரும் உயரமானவர்கள்.

(c) குமாரோ அன்றி முத்துவோ உயரமானவர்கள் அல்லர்.

(d) குமார் உயரமானவன் அல்ல, மேலும் முத்து குட்டையானவன்.

(e) குமாரும் முத்துவும் உயரமானவர்கள் அல்ல என்பது மெய்யற்றது.

(f) குமார் குட்டையானவன் அல்லது முத்து குட்டையானவன்.

(3) (a) p: நான் படிக்கிறேன்; q: நான் தேர்ச்சி பெறுவேன்; என்பன இரு வாக்கியங்கள். இவற்றைக் கொண்டு பின்வருவனவற்றை மொழியில் எழுதுக.

(a) $p \wedge q$ (b) $p \wedge (\sim q)$ (c) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

(d) $\sim (\sim p)$ (e) $(\sim p) \wedge q$ (f) $p \vee q$

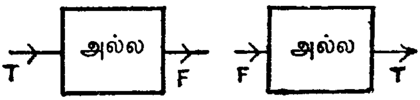
(4) கொடுக்கப் பெற்ற வாக்கியங்களுக்கு எதிர்மறை வாக்கியங்கள் தருக.

(i) கொடுக்கப் பெற்றுள்ள முக்கோணததின் அடிக் கோணங்கள் சமம்.

(ii) ஒவ்வொரு செவ்வகமும் ஒரு சதுரமாகும்.

(iii) எல்லா x-க்கும், $2x + 5x = 7x$.

(5) ஓர் 'அல்ல' மின் சுற்று என்பது உள்ளீடு ஒன்றும், வெளியீடு ஒன்றும் கொண்ட ஓர் எளிய மின் சுற்று. இவை எதிர் மதிப்பீடு உடையன.



படம் 1.

11001 என்ற தொடர் வரிசையை இச் சாதனத்தினுள் இட்டால் என்ன வெளிவரும்? கிடைத்த முடிவை மீட்டும் இதனுள் இட்டால் என்ன வெளிவரும்?

(6) $\sim(\sim p) = ?$ உன் விடையை மெய்ம்மை அட்டவணையைக் கொண்டு நிறுவுக.

(7) எடுகோள் : p : 12 என்பது 4இன் மடங்கு.

q : 12 என்பது 7இன் மடங்கு.

(i) $p \wedge q$ (ii) $p \vee q$ என்பன எவற்றைக் குறிக்கும்?

(8) p: $2 \times 4 = 8$; மேலும் q: $6 < 4$ எனில், பின் வருவன மெய்யா, மெய்யற்றதா எனக் காண்க.

(a) $\sim p$ (b) $\sim q$ (c) $p \wedge q$ (d) $p \vee q$

(e) $(\sim p) \wedge q$ (f) $(\sim p) \vee q$

(9) முற்றொருமைக் கூற்று என்பது எப்பொழுதும் மெய்யாக உள்ள ஒரு கூற்றாகும். அப்படிப்பட்ட கூற்றானது மெய்ம்மை அட்டவணையில் கடைசி நிரலில் (column) மெய் (T) என்ற அமைப்பையே பெற்றிருக்கும்.

$A \vee (\sim A)$ என்பது ஒரு முற்றொருமைக் கூற்று எனக் காட்டுக.

(10) $p \to q$ என்ற ஒருவழிச் சுட்டுடன் (i) மறுதலை (ii) எதிர் மாறி (iii) எதிர் மாறி மறுதலை என்ற மூன்று வழிச் சுட்டுக்கள் தொடர்புடையன ஆகும்.

(i) அசல் ஒரு வழிச்சுட்டு (Original) : $p \to q$

(ii) மறுதலை : $q \to p$

(iii) எதிர்மாறி : $\sim p \to \sim q$

(iv) எதிர்மாறி மறுதலை : $\sim q \to \sim p$

(a) இந்த நான்கு ஒருவழிச் சுட்டுகளையும் கொண்ட ஒரு மெய்ம்மை அட்டவணையை அமைக்கவும்.

(b) எந்த ஒருவழிச் சுட்டுகள் காரணீய முறையில் சமானமானவை ?

(c) p : இன்று காற்று மிகுதியாக வீசும் நாள்.

q : இன்று மழை நாள்.

$p \to q$ இதன் மறுதலை, எதிர்மாறி, எதிர்மாறி மறுதலை இவற்றை மொழியில் எழுதுக.

(11) மெய்ம்மை அட்டவணை மூலம் எழுதுக

(i) $p \vee p = p$.

(ii) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$

(iii) $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p) \wedge (\sim q) \equiv \sim q \leftrightarrow p$

(12) நிரூபிக்கவும் அல்லது மறுப்பு நிரூபணம் தரவும்.

x-இன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்

$$x^2 + 16 = (x + 4)(x - 4)$$

பகுதி E

விடைகள்

(1) (a), (b), (d), (f) என்பன கூற்றுகள்.

(2) (a) $(\sim p) \wedge (\sim q)$ (b) $p \wedge (\sim q)$ (c) $\sim p \wedge q$

(d) $(\sim p \wedge q)$ (e) $\sim [p \wedge (\sim q)]$ (f) $\sim p \vee q$.

(3) (a) நான் படிக்கிறேன்; மேலும் நான் தேர்ச்சி பெறுவேன்.

(b) நான் படிக்கிறேன; மேலும் நான் தேர்ச்சி பெற மாட்டேன்.

(c) நான் படிபபதுமில்லை; நான் தேர்ச்சி பெறப் போவதுமில்லை.

(d) நான் படிப்பதில்லை என்பது மெய்யற்றது.

(e) நான் படிப்பதில்லை; மேலும் நான் தேர்ச்சி பெறுவேன்

(f) நான் படிக்கிறேன் அல்லது நான் தேர்ச்சி பெறுவேன்

(4) (i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள முக்கோணததின் அடிக் கோணங்கள் சமமல்ல.

(ii) ஒவ்வொரு செவ்வகமும் ஒரு சதுரமல்ல.

(iii) ஏதோ சில x-க்கு $2x + 5x \neq 7x$.

(5) 00110 ; 11001

(6) $\sim(\sim p) = p$ ஏனெனில்,

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

(7) $p \wedge q = 12$ என்பது 4 மேலும் 7 என்ற இரு எண்களின் மடங்கு ஆகும்.

$p \vee q = 12$ என்பது 4 அல்லது 7 இன் மடங்கு ஆகும்.

(8) (a) p மெய் $\therefore \sim p$ மெய்யற்றது.

(b) q மெய்யற்றது $\therefore \sim q$ மெய்.

(c) $p \wedge q$ மெய்யற்றது. ஏனெனில் ஒரு துணை வாக்கியமான் q மெய்யற்றது.

(d) $p \vee q$ மெய். ஏனெனில் ஒரு துணை வாக்கியமான p மெய்.

(e) $\sim p \wedge q$ மெய்யற்றது. ஏனெனில், இரண்டு துணை வாக்கியங்களுமே மெய்யற்றவை.

(f) $\sim p \vee q$ மெய்யற்றது. ஏனெனில், இரண்டு துணைவாக்கியங்களும் மெய்யற்றவை.

(10)

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(\sim p) \to (\sim q)$	$(\sim q) \to (\sim p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

(b) $p \rightarrow q \equiv (\sim q) \rightarrow (\sim p)$

$$q \rightarrow p \equiv (\sim p) \rightarrow (\sim q)$$

(c) காற்று அதிகம் வீசும் நாளெனில் அப்பொழுது மழை நாளாகும். மழை நாளெனில் அப்பொழுது அது காற்று அதிகம் வீசும் நாளாகும். காற்று அதிகம் வீசாத நாளெனில் அப்பொழுது அது மழை நாளன்று. மழை நாளன்றெனில் அப்பொழுது அது காற்று அதிகம் வீசாத நாளாகும்.

(12) $x = 0$ என்ற மறுப்பு உதாரணம் கொடுத்து மறுப்பு நிரூபணம் தரலாம்.

பகுதி F

செயல் நிரல் காட்டி

(Flow Chart)

திட்டமிடுதலுக்கான செயல் நிரல் காட்டி

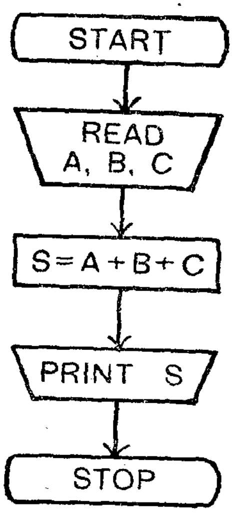
நாம் ஒரு விருந்திற்கு ஏற்பாடு செய்ய வேண்டுமென்றால் பின்வருவனவற்றிற்கு முன்கூட்டியே திட்டமிடல் வேண்டும்— உணவுப் பொருள்களை வாங்குதல், உணவுப் பொருள்களைத் தயாரித்தல், விருந்தினர்களை அழைத்தல், மேஜை நாற்காலிகளை ஒழுங்குபடுத்துதல் போன்றவைகளாகும். மேற்கூறிய செயல்களைச் செய்வதற்கான சரியான முறை, செய்ய வேண்டிய காரியங்களையும், அவை செய்யப்பட வேண்டிய நேரங்களையும், ஒரு பட்டியலாகத் தயார் செய்துகொண்டு பின் அவற்றைச் செய்தால் ஏதும் விடுபடாது சீராக விருந்து நடக்க உதவும். இதேபோல் தீர்க்கப்பட வேண்டிய ஒரு கணக்கைத் தர்க்க முறையில் பல படிகளாகப் பிரித்து அவற்றின் தரத்திற்கேற்ப ஒழுங்கு செய்து பின் அதைத் தீர்க்க வேண்டும். இஃது ஒரு சமயத்தில் ஒரே படியில் கவனம் செலுத்துவதற்கும், வழிதவறிச் செல்லாது இருப்பதற்கும் உதவி செய்கிறது. இதேபோல் கடினமான கணக்குகளைச் செய்யும்பொழுது அவற்றைப் பல சிறு சிறு கணக்குகளாகப் பிரித்து அவற்றின் தரத்திற்கேற்ப பல படிகளை ஒழுங்குபடுத்தி அமைத்துப் பின் அதைச் செய்ய முற்படுதல் வேண்டும். இம்முறை கடினமான கணக்குகளை எளிதாகச் செய்வதற்கு உதவுகிறது.

செயல் நிரல் காட்டி என்பது செய்யப்பட வேண்டிய ஒரு காரியத்தின் பல படிகளை அவற்றின் தரத்திற்கேற்பப் பிரித்து அமைத்த நிலையைக் காட்டும் ஒரு விளக்கப்படமாகும். ஒவ்வொரு செயலும் அல்லது அச்செயலின் ஒவ்வொரு பகுதியும் பட

விளக்கமாக ஒவ்வொரு பெட்டியில் காண்பிக்கப்படுகிறது. அப்பெட்டியின் அமைப்பு செய்யப்பட வேண்டிய காரியத்தின் தரத்திற்கேற்ப அமைகிறது. பொதுவாக ஒரு செயல் நிரல் காட்டி "தொடங்குக" என்ற குறிப்பிட்ட பெட்டியில் ஆரம்பித்து "நிறுத்துக" என்ற குறிப்பிட்ட பெட்டியில் முடியும். இவ்விரண்டு பெட்டிகளும் சாதாரணமாக நீள வட்டவடிவமான அல்லது வட்ட வடிவமான பெட்டிகளாக அமையும். ஓர் எளிய செயலானது பொதுவாக நீள் சதுர அல்லது சதுரப் பெட்டியில் குறிக்கப்படும். ஒரு செயலின் உள்ளீடும் அச்செயலின் வெளியீடும் சாதாரணமாகச் சாய்சதுர வடிவப் பெட்டிகளாகக் குறிக்கப்படும். செயல்களை வரிசைப்படுத்த அப்பெட்டிகளுக்கிடையில் அம்புக்குறிகள் பயன்படுத்தப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு

A, *B*, *C* என்ற மூன்று எண்களைக் கூட்டுவதற்கான செயல் நிரல் காட்டி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

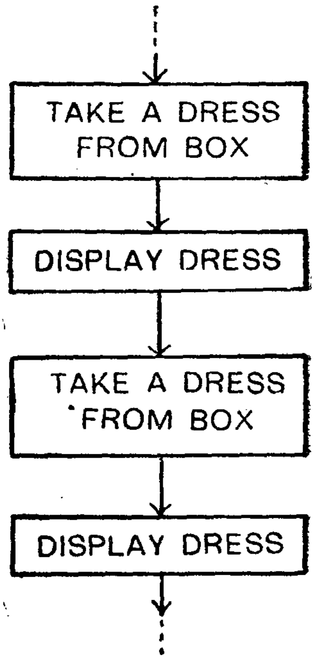


படம் 1.

பின்வரும் செயலுக்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயாரிக்கும் முறையை விளக்கத்துடன் காண்போம்:

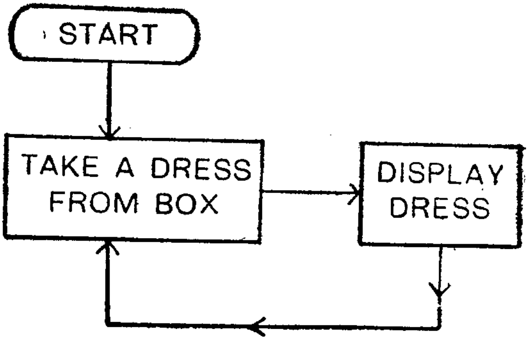
ஒரு விற்பனை உதவியாளர் 50 ஆடைகளை ஒரு பெட்டியிலிருந்து எடுத்து அவற்றைக் காட்சிக்கு வைக்கவேண்டும்.

மேலே கண்ட செயலுக்கான செயல் நிரல் காட்டி பின் வருமாறு அமையலாம்.



படம் 2.

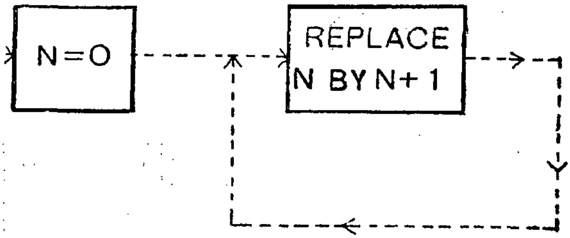
இம் முறையை 50 தடவைகள் பின்பற்றினால் மேலே கொடுக்கப்பட்ட செயலை அவர் செய்துமுடிக்க முடியும். ஆனால், இது சரியான ஒரு செயல் நிரல் காட்டியைத் தயாரிப்பதற்கான முறையல்ல. எனவே நாம் பின்வரும் சுருக்கமான முறையைப் பின்பற்றவேண்டும்.



படம் 3.

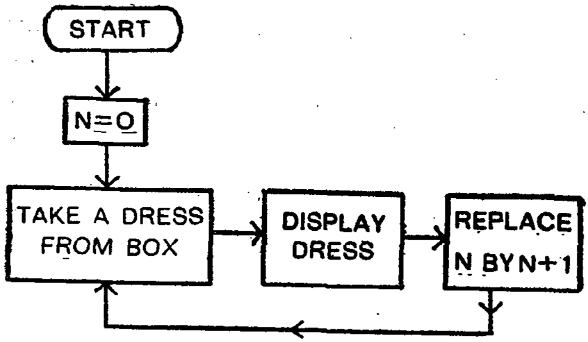
இரண்டாவது முறை முதல் முறையை விட எளிதானதும் சிறந்ததுமாகும். செயல்களின் வரிசை வளையங்களாகப் படத்தில் காட்டப்படுகின்றது. (ஓர் அம்புக்குறி வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஒரு பெட்டியிலிருந்து அதன் முந்தைய பெட்டிக்குச் சென்றால் வளையம் உண்டாகிறது.) ஆனால் எத்தனை முறை இச் செயலை நாம் செய்ய வேண்டும்? இக் குறிப்பு பெட்டியிலிருந்து முடிவில்லாமல் எடுத்துக்கொண்டும், காட்சிக்கு வைத்துக்கொண்டும் இருக்க வேண்டும் என்பதைக் குறிக்கின்றதா? இதுபோன்ற வினாக்களுக்கு மேலே கண்ட படத்தில் தெளிவான விளக்கமில்லை. எனவே மேலே கண்ட செயல் நிரல் காட்டியின் அமைப்பில் எண்ணிக்கை குறிப்பிடப்படவேண்டும்.

N என்பது ஒரு திட்டம் செயல்படும்போது மாறும் தன்மையைக் கொண்டது எனக் கொள்வோம். $N=0$ என்ற நிலையில் தொடங்கி N-இன் மதிப்பை ஒவ்வொரு முறையும் ஒவ்வொன்றாக அதிகரித்துக்கொண்டே செல்வோம். அப்பொழுது 'எண்ணியின்' அமைப்பு பின்வருமாறு அமையும்:



படம் 4.

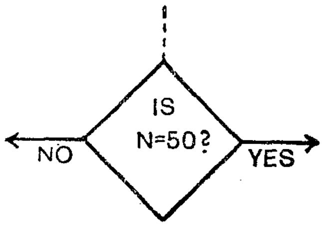
மதிப்பு மாறுதலடைந்த பெட்டி அச்செயலைச் செய்யப்பட வேண்டிய முறைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. இதை நாம் நமது முந்தைய செயல் நிரல் காட்டியுடன் இணைப்போம்.



படம் 5.

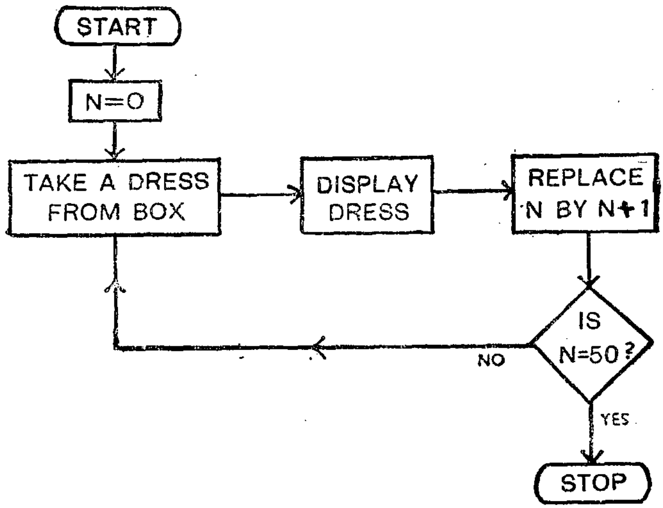
இப் படம் நமது முந்தைய படங்களை விடச் சிறந்த முறையில் அமைந்துள்ளது. ஏனெனில் எத்தனை முறை ஒரு காரியம் செய்யப்பட வேண்டும் என்பதற்கான விளக்கம் இதில் அமைந்துள்ளது. இருந்தபோதிலும் வெளிவருவதற்கான வழியும், செயலை முடிப்பதற்கான வழியும் இல்லாததனால் இதுவும் ஒரு செயல் நிரல் காட்டி ஆகாது. எனவே, நாம் நமக்குத் தேவையான எண்ணிக்கைகளைக் கவனிக்கவும், 50 ஆடைகள் பெட்டியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுக் காட்சிக்கு வைக்கப்பட்டவுடன் அச்செயலை நிறுத்தவும் ஒரு முடிவுப் பெட்டியை இணைப்போம்.

ஒரு முடிவுப் பெட்டி என்பது சாய்சதுர வடிவமான பெட்டியாகும். அதில் ஆம் அல்லது இல்லை என்ற விடையைத் தரக்கூடிய வினா ஒன்று இருக்கும். அவ்வினாவிற்கான விடை ஆம் எனில், செயல் நிரல் காட்டி ஒரு திசையிலும், இல்லையெனில் அது மற்றொரு திசையிலும் பிரிந்து செல்லும்.



படம் 6.

முடிவுப் பெட்டியைச் சேர்த்த பிறகு நாம் செய்யவேண்டிய செயலின் செயல் நிரல் காட்டி கீழே தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 7.

முடிவாக நாம் கவனத்தில் கொள்ள வேண்டியது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலே கண்ட செயல் நிரல் காட்டி 50 ஆடைகளை ஒரு பெட்டியிலிருந்து எடுத்து அவற்றைக் காட்சிக்கு வைக்கவேண்டிய செயல்முறையைக் குறிப்பதாகும். 200 ஆடைகளை ஒரு பெட்டியிலிருந்து எடுத்துக் காட்சிக்கு வைக்க் வேண்டிய செயல் முறையைக் குறிப்பிட வேண்டுமென்றால், நாம் தனியாக ஒரு செயல் நிரல் காட்டி தயாரிக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. முடிவுப் பெட்டியில் "Is $N = 200$?" என்று குறித்தாலே போதுமானது. இவ்வாறு கப் பெட்டியிலிருந்து எத்தனை ஆடைகளை எடுத்துக் காட்சிக்கு வைப்பது என்றாலும் தனியாகச் செயல் நிரல் காட்டி ஒன்று தயாரிக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.

செயல் நிரல் காட்டியைத் தயாரிப்பதில் பல வேறுபாடுகள் இருந்த போதிலும் நாம் கவனிக்கவேண்டிய குறிப்புகள் சில கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பொதுவாகச் செயல் நிரல் காட்டி கீழ்ப் புறமாக அல்லது வலப் புறமாக அல்லது இடப் புறமாகச் செல்ல வேண்டும். இவற்றில் திருப்பித் திருப்பி ஒரே செயலைச் செய்வதற் கான வளையங்கள் ஏற்படவும் வாய்ப்பு உண்டு. அம்புக் குறிகள் செயல் நிரல் காட்டியின் திசையைத் தெளிவாகக் குறிக்க வேண்டும். ஒவ்வொரு முடிவுப் பெட்டியிலிருந்தும் செலலும் " ஆம் " அல்லது " இல்லை " என்பனவற்றின் அம்புக்குறிகள் எந்த முடிவை நோக்கிச் செல்கின்றன என்பது தெளிவாகக் குறிக்கப்படுதல் வேண்டும்.

பொதுவாக ஒரு செயலுக்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயாரிக்கும் பொழுது நாம் பின் வருவனவற்றை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும். அவை முறையே (1) அச் செயலை வரிசைப் படுத்தப்பட்ட சிறு சிறு செயல்களாகப் பிரித்துக் கொள்ளுதல் வேண்டும். (2) " தொடங்குக " (Start), "உள்ளீடு" (Input), " செயல்கள் " (Operations), " வெளியீடு " (Output), " நிறுத்துக " (Stop) இவற்றைத் தனித்தனி அமைப்பு களாகக் குறித்துக் கொள்ள வேண்டும். ஒவ்வொரு சிறு செயலை யும், அதன் தரத்திற்கேற்ப வரிசைப்படுத்த அம்புக்குறியைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

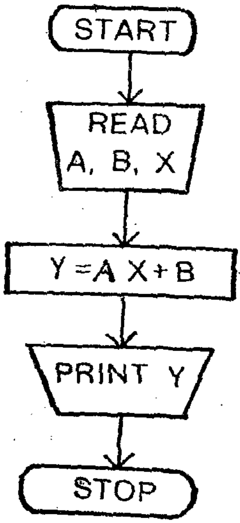
மின் அணு மூளைத் திட்டங்களின் (Computer) செயல் நிரல் காட்டிகள்

கொடுக்கப்பட்ட கணக்கைச் சிறு சிறு பகுதிகளாகப் பிரித்து அவற்றின் தரத்திற்கேற்ப வரிசைப்படுத்திக் கொள்ளுதல் என்னும் உத்தி மின் அணு மூளைக்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயாரிப்பதில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மின் அணுமூளை கொடுக்கப் பட்ட கணக்கை ஒரேடியாகச் செய்துவிடுதல் என்பது முடியாத தாகும். மின் அணுமூளையில் ஊட்டப்படும் செய்திகள் எளிய எண் கணிதச் செயல்களைக் கொண்ட சிறிய படிகளைக் கொண்டதாகச் சிறு, சிறு எளிதான அடிப்படை எண் கணிதச் செயல்களை மட்டும் செய்யப் பயன்படுத்தக்கூடியதாகும். இரு எண்களில் மிகப் பெரிய எண் என்பதை உணர்ந்து, ஊட்டப்பட்ட செய்திகளுக் கேற்ப எண்களைத் தமது சேமிப்புக் கிடங்கிலிருந்து (Store) நகர்த் தவும் இதனால் முடியும்

ஆனால் செயல்களைச் செய்வதில் இதன் மிக அதிகமான வேகம் இதை மிகப் பயனுள்ளதாகச் செய்கிறது. இது தொகை நுண் கணிதம், வகை நுண் கணிதம் போன்ற கடினமான கணிதப் பகுதிகளைச் செய்வதற்கும் எல்லாவிதமான நீண்ட கணக்குகளைச் செய்வதற்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. தேவையான, வரிசைப்படுத்தப்பட்ட சார்புடைய செய்திகளை உள்ளடக்கிய மின் அணுமூளையில் 'நினைவு மண்டலம்' (Memory Centre) என்ற பகுதி ஒன்றுண்டு. இப்பகுதியின் உதவியைக் கொண்டு மின் அணுமூளையை மடக்கை அட்டவணை போன்ற கணித அட்டவணைகளை நாம் பயன்படுத்த முடியும். ஒரு குறிப் பிட்ட பிரச்சினைக்குத் தேவையான சார்புடைய செய்திகள் செலுத்துபவரால் உள்ளே செலுத்தப்பட வேண்டும். (மின் அணுமூளை என்பது தட்டெழுத்துப் பொறி போன்ற ஒரு கருவி யாகும்.) மேலும் இது அச்சுப் பொறி, தட்டெழுத்துப் பொறி போன்று முடிவுப் பயனைக் கணக்கீடுகளின்மூலம் தரும் ஒரு கருவி யாகும். மின் அணுமூளையால் படிப்படியாக எடுத்துக்கொள்ளப் படும் செய்திகளுக்குத் "திட்டம்" (Programme) என்று பெயர்.

நாம் தீர்க்கப்பட வேண்டிய கணக்கிற்கு அல்லது பிரச்சினைக் குத் தயாரிக்கும் திட்டமும், அதற்கான செய்முறை எண் கணிதச் செய்திகளும் மின் அணுமூளையால் புரிந்து கொள்ளக்கூடிய ஒரு

மொழியில் அதனுள் செலுத்த வேண்டும். ஒரு கடினமான கணக்கைத் தீர்ப்பதற்கு நாம் தயாரிக்கும் திட்டம் பற்பல செய்திகளை உள்ளடக்கியதாக இருக்கும். அதற்குச் செயல்நிலை காட்டி மின் அணுமுளையைப் பயன்படுத்துபவருக்கு மிகவும் பயனுள்ளதாக அமைந்திருக்கும்.



படம் 8.

$Y = ax + b$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொண்டு Y-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். a, b, x இவற்றின் மதிப்புகள் செய்திகளாக மின் அணுமுளையில் செலுத்தப்படும். இச் சமன்பாடு கூட்டல், பெருக்கல் என்ற எளிய செயல்களைக் கொண்டதாக அமைந்திருப்பதால் இதை நாம் ஒரு குறிப்பாகக் கொடுக்கலாம். பிறகு Y-ன் மதிப்பைக் கூறும்படி மின் அணுமுளை கேட்டுக் கொள்ளப்படும். கீழே கண்ட செயல் நிரல் காட்டியில் இந்தச் செயல்கள் குறியீடுகளினால் குறிப்பிடப் பட்டுள்ளது. ஆனால் உண்மையில் இக் குறிப்புகளை நமக்குத் தெரிந்த எந்தச் சிறப்பு மொழியிலும் எழுதிக் கொள்ளலாம்.

மற்ருேர் உதாரணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். 2^8-ன் மதிப்பைக் கணக்கிடுவதற்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

இதை வாய்மொழியாக நாம் செய்யும்பொழுது, 2, 4, 8, 16,.. ... என்று ஒவ்வொரு முறையும் முதல் எண்ணை 2 ஆல் பெருக்கிக் கொண்டே செல்வோம். இதில் நாம் தவறிவிடாமல் இருப்பதற்காக நம் விரல்களை நாம் பயன்படுத்திக் கொள்வதும் உண்டு. இம் முறையில் நமது விரல்கள் நாம் நினைக்கும் எண்களை எண்ணும் கருவிகளாகப் பயன்படுகின்றன. இவ்வாருக நாம் நினைக்கும் எண்ணை R எனவும், எண்ணும் எண்ணை (கை விரல் களில்) C எனவும் குறித்துக் கொள்வோம். இப்பொழுது 2^8–ன் மதிப்பைக் கணக்கிடும் முறையைப் பின் வருமாறு குறிக்கலாம்.

(1) R-ன் ஆரம்ப மதிப்பை 2 எனவும் C-ன் ஆரம்ப மதிப்பை 1 எனவும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

(2) R-ன் மதிப்பை இரட்டையாக்க நமக்குக் கிடைப்பது $R = 2 \times R$.

(3) C-ன் மதிபபை ஒன்று அதிகப்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது $C = C + 1$

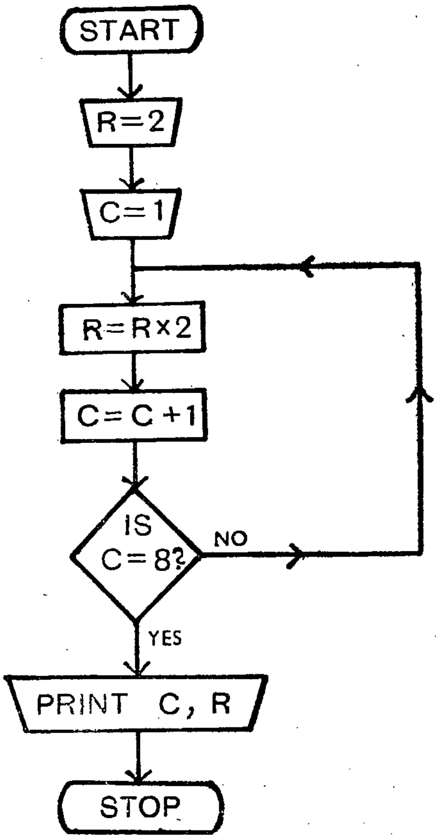
(4) C-ன் மதிப்பு 8 என்பதா என்று சோதித்துப் பார்ககவும். ஆம் எனில் ஐந்தாம் படிக்குச் செல்லவும். இல்லையெனில் நாலாம் படியின் மூலமாக இரண்டாம் படியைத் திரும்பச் செய்யவும்.

(5) R-ன் மதிப்பை எழுதிக் கொள்ளவும்

இரண்டாம் படியை ஒவ்வொரு முறை செயயும் பொழுதும் R-ன் மதிப்பு 2 மடங்காகிறது. சுருங்கக் கூறின் முநதைய மதிப் பிற்குப் பதிலாக அதன் 2 மடங்கு என்ற புதிய மதிப்பை நாம் பிரதியிடுகிருேம். (இதே முறைதான் மின் அணுமுளையிலும் கணக்கிடுவதற்குப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.) இதேபோல் $C = C + 1$ என்பது Cஇன் மதிப்பு ஒன்று கூடுகிறது என்பதைக் குறிக்கிறது.

" = " என்னும் குறியீடு, இக் குறியீட்டின் இடதுபக்கத்திலுள்ள எண், வலதுபுறத்திலுள்ள எண்ணின் கணக்கிடப்பட்ட புதிய எண்ணால் மாற்றப்படும்பொழுது பயன்படுத்தப்படுகிறது.

மேலே கண்ட கணக்கீட்டிற்கான செயல் நிரல் காட்டி கீழே கொடுக்கபபட்டுள்ளது.



படம் 8.

நாம் மேலே கண்ட செயல் நிரல் காட்டியைப பின்பற்றி செயலைச் செயவது எவ்வாறு என்று காண்போம். இதில் R, C

என்ற 2 குறியீடுகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ளன. R என்னும் குறியீடு தொடர்ந்து எண்களை 2 ஆல் பெருக்குவதற்கும், C என்னும் குறியீடு பெருக்கலின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதற்கும் பயன்படுத்தப்படுகிறது. வெற்று ஓட்டம் என்பது இத்திட்டத்தின் படி செயல்படுவதையும், R, C என்ற குறியீடுகளில் தகுந்த எண்களைப் பிரதியிடுதலையும் கொண்டு இத்திட்டம் செயல்படுதலைச் சரிபார்ப்பதாகும்.

R	C
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8

முடிவுப் பயனாக நமக்குக் கிடைக்கும் எண் 8, 256. அதாவது, $2^8 = 256$.

கொடுத்த எண்களில் மிகப் பெரிய எண்ணைக் காணுதல் :

உதாரணமாக $A_1, A_2 \ldots A_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட 'n' எண்கள் எனக்கொள்வோம். இவற்றில் மிகப்பெரிய எண்ணைக் காண்பதற்கான செயல் நிரல்காட்டியைத் தயார் செய்வது எவ்வாறு எனக் காண்போம்.

(1) முதல் எண்ணை எடுத்துக்கொள்க.

+2 க 8

(2) அதை 2வது எண்ணுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

(3) அவ்விரண்டு எண்களில் முதல் எண் பெரியது என்றால் அல்லது அவை இரண்டும் சமம் என்றால் முதல் எண்ணை மட்டும் தக்கவைத்துக் கொள்க.

(4) அவற்றில் இரண்டாவது எண் பெரியது என்றால் இரண்டாவது எண்ணை மட்டும் தக்கவைத்துக் கொள்க.

(5) இவ்வாறு தக்கவைத்துக் கொண்ட எண்ணைக் கொடுக்கப்பட்ட பட்டியலில் உள்ள அடுத்த எண்ணுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க.

(6) 5வது படியின் வழியாக 3வது படியைத் திரும்பத் திரும்பப் பட்டியலில் உள்ள கடைசி எண் தக்கவைத்துக் கொண்ட எண்ணுடன் ஒப்பிடப்படும் வரை செய்க.

மேலே கண்ட முறையைக் குறிப்பதற்கான சரியான முறை இயற்கணித வடிவமாகும். நடத்தையைத் தவற விடாமல் இருப்பதற்காக அல்லது வரிசையைத் தவறவிடாமல் இருப்பதற்காக J என்ற எண்ணியைப் பயன்படுத்துவோம். நாம், ஒரு மனிதன் எழுதுப் பலகையைப் பயன்படுத்தி ஒப்பிடப்பட்ட பெரிய எண்ணைக் குறித்துக் கொள்கிறான் எனக் கொள்வோம். எண்கள் ஒப்பிடப்பட்டு பெரிய எண் ஒப்பிடப்பட்ட இடத்தை Z எனக் கொள்வோம். இம்முறை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(1) $Z = A$ எனக் கொள்க.

(2) $J = 2$ எனக் கொள்க.

(3) $J > N$ எனில் கணக்கிடுவதை நிறுத்திவிட்டு 8வது படிக்குச் செல்க. இல்லாவிடில் 4வது படிக்குச் செல்க.

(4) $Z < A_J$ எனில் 5வது படிக்குச் செல்க. இல்லாவிடில் 6வது படிக்குச் செல்க.

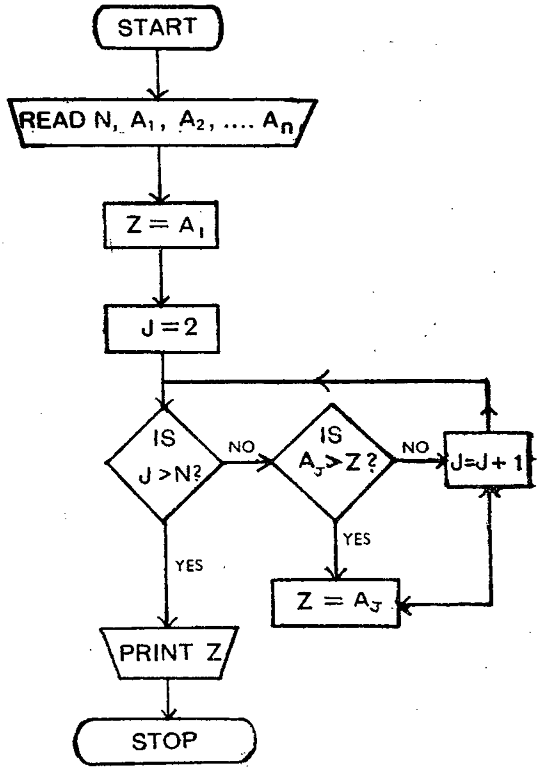
(5) $Z = A_j$ என்று அமைத்துக்கொள்க.

(6) Jன் மதிப்பை ஒன்று அதிகப்படுத்த நமக்குக் கிடைப்பது $J = J + 1$.

(7) 3வது படிக்குச் செல்க.

(8) Z என்பது நமக்குத் தேவையான எண்ணாகும்.

மேலே கண்டவற்றின் செயல் நிரல் காட்டி கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.



படம் 10.

கழித்தலின் மூலம் வகுத்தல் :

பெருக்கல் என்பது தொடர் கூட்டலாகும். உதாரணமாக 4×5 ஐக் காண்பதற்காக 4ஐ 4 உடன் ஐந்து முறை கூட்டக் கிடைப்பது. இதேபோல் வகுத்தல் என்பது தொடர் கழித்த லாகும். உதாரணமாக,

$\frac{56}{8}$ கணக்கிடுவதற்கான முறை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

56

$56 - 8 = 48$

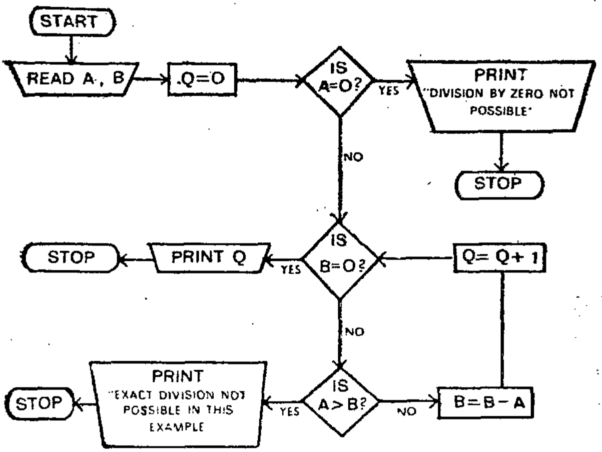
$48 - 8 = 40$

....

....

$8 - 8 = 0$

எனவே 8ஐ 7 முறைகள் 56ல் இருந்து கழித்தால் $\frac{56}{8} = 7$ ஆகும். Bஐ Aஆல் வகுப்பதற்கான செயல் நிரல் காட்டி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (Aயும் Bயும் மிகை முழுக்கள் எனக் கொள்க.) நாம் Bயிலிருந்து Aஐ எத்தனை முறைக் கழிக்கலாம் என்பதைக் காணவேண்டும். அதாவது $Q = B/A$ ஆகும். Aக்கும், Bக்கும் மதிப்பை எடுத்துக்கொண்டு பின்வரும் செயல் நிரல் காட்டிச் செயல்படுத்திச் சரிபார்க்கலாம்.



படம் 11.

விரும்பிய அளவிற்கு நுணுக்கம் காணல்

மின் அணுமூளையின் சிறப்புகளில் ஒன்று மிக நுணுக்கமாகக் கணக்கிடுதல் ஆகும். பத்து ஸ்தானங்களுக்குச் சுத்தமாக ஒரு முடிவுப் பயனை நாம் அடைய வேண்டுமென்றாலும் மின் அணு மூளைக்குச் செலுத்தப்படும் குறிப்புகளைக் கொண்டு அதன் திறனால் விரும்பிய அளவு நுணுக்கமான விடையை நாம் பெற முடியும். 4-ன் வர்க்க மூலத்தைக் காண பின்வரும் முறையைக் கையாளலாம்.

1. 4-ன் வர்க்க மூலத்தை 1 எனக் கொள்க.

2. 4ஐ 1ஆல் வகுக்க ஈவு 4 ஆகும். இது நாம் எடுத்துக் கொண்ட வர்க்கமூலத்தில் இருந்து மாறுபட்டுள்ளது.

3. $\frac{4+1}{2} = 2.5$ என்பதை 4-ன் வர்க்க மூலமாகக் கொள்வோம். இது 4-ன் வர்க்க மூலத்தை நெருங்கியுள்ளது.

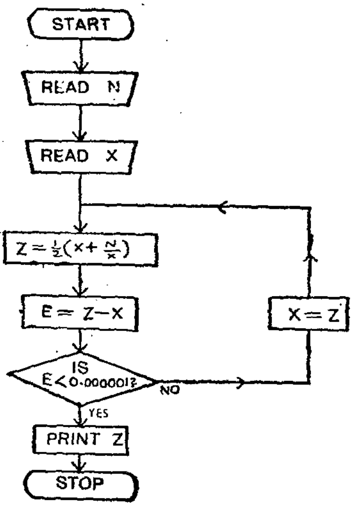
4. 4ஐப் புதிய யூகமான 2·5ஆல் வகுக்க $\frac{4}{2\cdot5} = 1\cdot6$.

5. 2·5, 1·6 இவற்றின் சராசரியை 4-ன் வர்க்கமூலமாகக் கொள்வோம்.

$$\frac{2\cdot5 + 1\cdot6}{2} = 2\cdot05.$$

இவ்வாறாக நாம் கண்ட வர்க்கமூலமான 2·05 என்பது 4-ன் உண்மையான வர்க்கமூலமான 2ஐ நெருங்கிக்கொண்டிருக்கிறது என்பதைக் காண்கிறோம். இம்முறையில் தொடர்ந்து சென்றோமேயானால் 4-ன் சரியான வர்க்கமூலத்தைக் காண முடியும்.

N-ன் வர்க்கமூலத்தை ஐந்து ஸ்தான சுத்தமாகக் காணப் பயன்படும் செயல் நிரல் காட்டி:



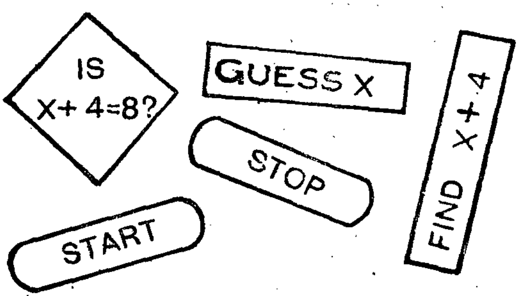
படம் 12.

பயிற்சி

1. C என்பது வெப்பநிலையை சென்டிகிரேடில் குறிக்கிறது. F என்பது பாரன்ஹீட்டில் குறிக்கிறது. அவை $F = 1{\cdot}8C + 32$ என்ற சமன்பாட்டால் ஒன்றுக்கொன்று சம்பந்தப்படுத்தப்படு கின்றன. வெப்பநிலையை பாரன்ஹீட்டில் காண்பதற்கான ஒரு செயல் நிரல் காட்டியை வரைக.

2. x, y, z பக்கங்களையுடைய ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றளவைக் காணப் பயன்படும் ஒரு செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

3. கீழே வரும் பெட்டிகள் $x+4=8$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு கணத்தைக் காண்பதற்கான வழிமுறைகளையும் வினைக் களையும் கொண்டுள்ளன. இவற்றை அம்புக் குறிகளிட்டுச் சரி யான முறையில் வரிசைப்படுத்துக. தேவையான இடங்களில் ஆம் அல்லது இல்லை என்பதை எழுதிக்கொள்க.



படம் 13.

4. (i) $2x + 1 = 5$;

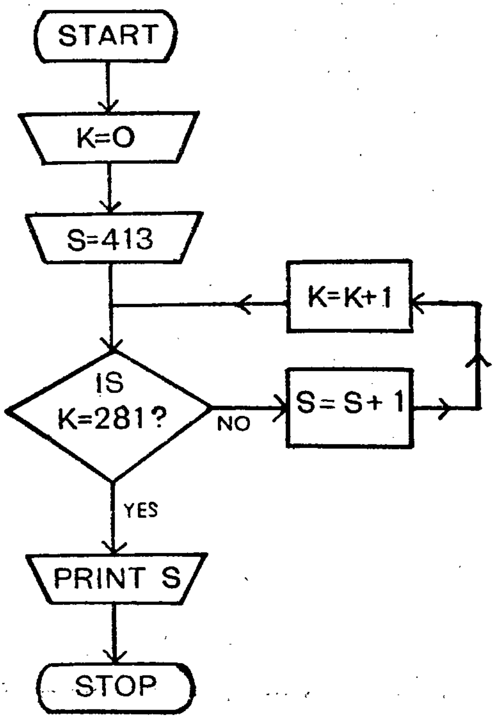
(ii) $\dfrac{3x-1}{2} = 4$; $x \in Q$ என்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுக் கணங்களைக் காண்பதற்கான செயல் நிரல் காட்டி களைத் தயார் செய்க.

5. $P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^T$ என்பதைக் காண்பதற்கான ஒரு செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க. (P, R, T கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.)

6. x, y என்ற வேறுபட்ட இரு எண்கள் ஒன்று மற்றொன்றைவிடப் பெரிதாக அமையச் செய்ய தேவையான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

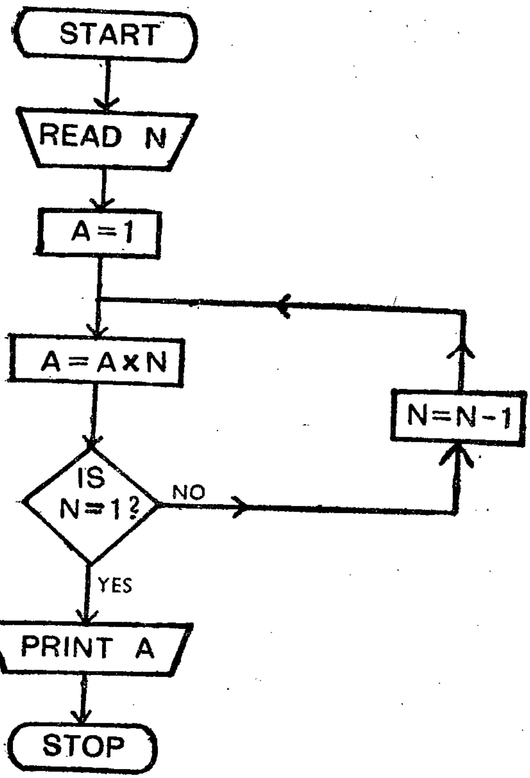
7. A, B, C என்ற மூன்று கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்களில் பெரிய எண்ணைக் காண்பதற்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

8. பின்வரும் செயல் நிரல் காட்டியைப் பயன்படுத்தி S-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க.



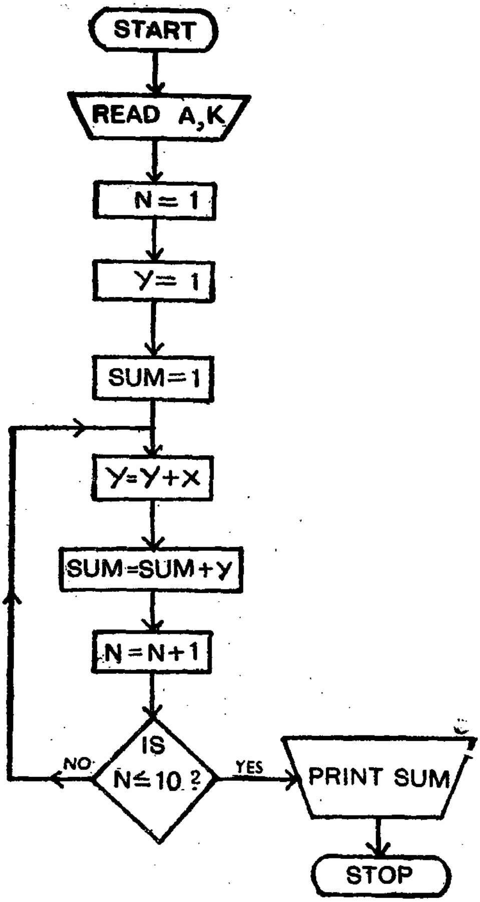
படம் 14.

9. பின்வரும் செயல் நிரல் காட்டியின் முடிவுப் பயனைக் காண்க.



படம் 15.

10. அடுத்துள்ள செயல் நிரல் காட்டியில் S-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.



படம் 16.

11. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{100}$ ன் மதிப்பைக் காண்பதற்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

12. ஓர் ஆண்டு லீப் வருடமா இல்லையா என்பதைக் காண்பதற்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

13. ஒரு தேர்வில் மாணவர்கள் வாங்கிய மதிப்பெண்களுக்கான குறியீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

40%க்குக் கீழே	குறியீடு F
40% — 49%	குறியீடு E
50% — 59%	குறியீடு D
60% — 69%	குறியீடு C
70% — 79%	குறியீடு B
80%ம் அதற்குமேலும்	குறியீடு A

கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பெண்ணிற்கான குறியீட்டைக் காணப் பயன்படும் செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

14. $\frac{1}{1+x^3}$; $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$-ன் மதிப்பைக் காண்பதற்கான ஒரு செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

15. பின்வருவனவற்றைக் கணக்கிடப் பயன்படும் செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

(a) $1+2+3+\ldots\ldots+n$

(b) $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2$

16. $ax^2+bx+c=0$ என்ற இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்பதற்கான செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க.

17. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஐந்து எண்களை ஏறு வரிசையில் எழுதுவதற்குப் பயன்படும் ஒரு செயல் நிரல் காட்டியைத் தயார் செய்க. இதைக் கொடுக்கப்பட்ட 10 எண்களை ஏறு வரிசைய

படுத்துவதற்குப் பயன்படும் செயல் நிரல் காட்டியாக மாற்றம் செய்ய முடியுமா?

18. ஒருவர் ஒவ்வொரு மாதமும் ஒரு குறிப்பிட்ட தொகை வீதம் N ஆண்டுகளுக்குத் தொடர் இட்டு வைப்பில் தொகை செலுத்தி வந்தார். ஒவ்வொரு மாதமும் வட்டி அசலுடன் சேர்த்துக்கொள்ளப்படுகிறது. ஒவ்வோர் ஆண்டு முடிவிலும் அவர் எவ்வளவு சேமித்து வைத்துள்ளார் என்பதைக் காட்ட N ஆண்டுகளுக்கான செயல் நிரல் காட்டி ஒன்றைத் தயார் செய்க.

பகுதி G

கணித வடிவமைப்பு
இயற்பியல் வடிவமைப்பு

தன்னிடமுள்ள செய்திகள், கட்டுப்பாடு ஆகியவற்றைக் கொண்டு முடிவுகளெடுக்கச் சில வடிவமைப்புகள் மனிதனுக்கு உதவுகின்றன. தான் சேகரித்த உண்மைகளை ஏற்கெனவே அறியப்பட்ட ஒரு வடிவமைப்பிேேனாடு ஒட்டி நோக்குவதன் மூலமாக, அவ்வுண்மைகளிடமிருந்து சில புதிய விளக்கங்கள் பெற இயலும். இத்தகைய வடிவமைப்புகள் மனித அறிவு வளர்ச்சிக்குப் பெரிதும் உதவுகின்றன. உதாரணமாக, விமானங்களின் மாதிரிகள் காற்றுத் துளைகளில்தான் முதலில் சோதனை செய்யப்படுகின்றன. பின்னரே, விமானங்கள் கட்டப்படுகின்றன. பொறியியல் வல்லுநர்களும், அறிவியலறிஞர்களும் காலம், பணம், உழைப்பு ஆகியவற்றின் விரையத்தைக் குறைப்பதற்காகத் தன்னறிவைச் சிறிய மாதிரிகள் மூலமே சோதனை செய்து திருப்தி அடைகின்றனர். இருந்தபோதிலும் மாதிரிகளைப் பயன்படுத்தும் பொழுது அவற்றின் அசல்களில் உள்ள பல்வேறு வசதிகள் இவற்றில் இல்லாமல் இருந்தாலும் மாதிரிகளின் முக்கியத்துவத்தை நாம் குறைத்து மதிப்பிட முடியாது. ஏனெனில், பல சமயங்களில் அறிவியல் அறிவை விருத்தி செய்வதற்கு மாதிரிகளைத் தவிர வேறு வழியில்லாமற் போகிறது.

கணித வடிவமைப்புகள்

இயற்பியல் வடிவமைப்புகளைத்தான் நாம் இதுகாறும் பார்த்தோம். இதர வடிவமைப்புகளும் ஆராய்ச்சியாளர்களால் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. இவைகளே கணித வடிவமைப்பு

களாகும். மாற்றுத் தோற்றம் கணித அல்லது அவற்றை ஒத்த குறியீடுகளின் வடிவங்களாக அமைந்துள்ளது. வெப்ப மாற்றுக் கருவியைப் பற்றி ஒரு பொறியியல் வல்லுநர் ஆராய்ந்து வருவதாகக் கொள்வோம். அக்கருவியின் கூட்டின் அமைப்பை மாற்றுவதன் மூலம் வெப்ப படர்வேகம் எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதை அவர் ஆராய்கிறார் எனக் கொண்டால், அவர் ஓர் உண்மையான வெப்ப மாற்றுக் கருவியை எடுத்துக் கொண்டு ஆராயவேண்டிய அவசியமில்லை. மேலும் அவர் ஆராய்ச்சியில் பயன்படுத்தும் சமன்பாடுகளில் சில எண்களின் மதிப்பை மாற்றி அமைத்தாலே போதுமானது. அச் சமன்பாடுகள் இப்போது மாதிரி களாக வடிவமைப்புகளாகப் பயன்படுகின்றன.

''சின்ஞ்'' (Synge) என்ற கணித அறிஞர் கணித வடிவமைப்பு களைப் பயன்படுத்தும் வழிமுறைகளைப் பின் வருமாறு தொகுத் துள்ளார்:

(1) உண்மை உலகிலிருந்து கணித உலகம் என்ற கடலிலே குதித்தல்.

(2) கணித உலகக் கடலிலே நீந்துதல்.

(3) கணித உலகக் கடலினின்று உண்மை உலகிற்குச் சில புத்தறிவோடு மீளத் திரும்புதல்.

கணித வடிவமைப்பிலே முதற்படியான உண்மை உலகி லிருந்து கணித உலகிற்குக் குதிக்கும் நிலையை நாம் சிறிது கவனிப்போம். இயற்பியல் சூழ்நிலையில் ஆரம்பித்து இயற்பியல் பொருள்களைக் கணிதச் சமன்பாடுகளாக மாற்றவும், அவற்றின் தொடர்புகளைக் கணிதக் குறியீடுகளில் விளக்கவும் நாம் பல உதாரணங்களை எடுத்துக் கொள்வோம்.

ஓர் ஊர்தியின் தடை இயக்கத் தூரத்தைக் கணக்கிடுதல்

ஒரு மோட்டார் ஊர்தியில் தடையைப் பயன்படுத்திய பிறகு அவ்வூர்தி குறைந்தது எத்தனை தூரத்தில் சென்று நிற்கும் என்பதைக் கணக்கிடும்பொழுது நாம் காணும் அக் குறைந்த

தூரமே அவ்வூர்தியின் தடை இயக்கத் தூரமாகும். பற்பல ஊர்திகளின் வேகங்களையும் அவற்றின் தடை இயக்கத் தூரங்களைக் கவனித்து அறிந்தும், நமது அறிவைப் பயன்படுத்தியும் நாம் கீழ்க் கண்ட உண்மையை அறிவோம். ஓர் ஊர்தியின் தடை இயக்கத் தூரம் அதன் வேகத்தின் வர்க்கத்திற்கு இயைந்த வகையில் மாறுகிறது.

b என்பது தடை இயககத் தூரத்தையும், v என்பது வேகத்தையும் குறித்தால் $b \propto v^2$.

அல்லது $b = k\, v^2$

இச் சமன்பாடு ஒரு வடிவமைப்பைத் தருகின்றது. உதாரணமாக ஓர் ஊர்தி மணிக்கு 40 கி. மீ. வேகத்தில் போய்க் கொண்டிருக்கிறது எனவும், அதன் தடை இயக்கத் தூரம் 90 மீ. எனவும் கொண்டால் நாம் ‘ k ’–ன் மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

$$90 = k .\, 40^2$$

$$k = \frac{9}{160}$$

அதாவது $b = \frac{9}{160} v^2$ என்பது அந்த ஊர்திக்குப் பொருத்தமான சமன்பாடு ஆகும். மேலும், மணிக்கு 80 கி.மீ. வேகத்தில் செல்லும்பொழுது அதனது தடை இயக்கத் தூரத்தைக் கணிப்பதற்கு மேற்கண்ட சோதனையைத் திரும்பவும் செய்து கொண்டிருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை. ஏனெனில், அவ்வாகனத்தின் தடை இயக்கத் தூரத்தைக் கணிப்பதற்கு $b = \frac{9}{160}\ v^2$ என்னும் சமன்பாடு ஒரு வடிவமைப்பாகப் பயன்படுகின்றது. $v = 80$ எனக் கொண்டால் $b = \frac{9}{160} .\ 80^2 = 360$ மீ.

$b = k\, v^2$ என்னும் சமன்பாடு ஓர் ஊர்தியின் தடை இயக்கத் தூரத்தைக் காண்பதற்கு எவ்வாறு பயன்படுகின்றது என்பதையும்,

எவ்வாறு வாகனத்திற்கான தடை இயக்கத் தூரத்தைக் காணத் தகுந்த வடிவமைப்பாக அது பயன்படுகின்றது என்பதையும் நாம் மேலே கண்டோம்.

மருந்து வடிவமைப்பு

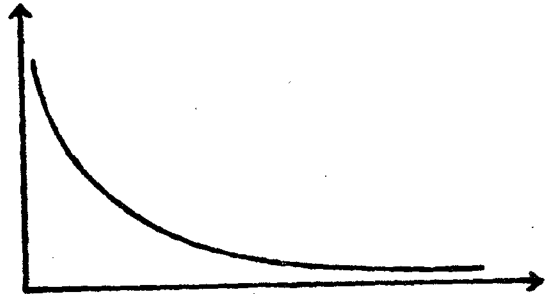
J. S. ருஸ்டாகி என்ற இந்திய கணித அறிஞரால் வடிவமைக்கப்பட்ட மனித உடலில் ஏற்படும் நச்சு நீக்கியின் (antibiotic) அளவைக் காணும் வடிவமைப்பு பற்றி காண்போம். பொதுவாக மருத்துவர்கள் நச்சு நீக்கியினை அதிக அளவில் முதலில் கொடுத்துப் பிறகு சிறிய அளவில் அதைத் தொடர்ந்து கொடுத்து வருவார்கள். ஏனெனில், அப்பொழுது தான் அம்மருந்தின் அளவு உடலில் குறையாமல் ஒரே அளவாக இருந்துவரும். இல்லாவிடில் அதன் அளவு சிறிது சிறிதாகக் குறைந்து வந்து பின்னர் மறைந்து விடும். 't' என்ற நேரத்தில் மனித உடலில் அம் மருந்தின் அளவை 'Y' எனக் குறிப்போம். சிறிது காலத்திற்குப் பிறகு Y-ன் அளவு குறைந்து அது மறைந்துவிடுகின்றது. அதாவது $Y = 0$ ஆகிவிடுகின்றது. Y_0 என்பது ஆரம்பத்தில் கொடுக்கும் மருந்தின் அளவைக் குறிக்கிறது எனக் கொள்வோம். எவ்வளவுக் கெவ்வளவு மனித இரத்தத்தில் அம் மருந்து இருக்கிறதோ அதே விகிதத்தில் அது உடலிலிருந்து குறைகிறது எனக் கொள்வோம். மருந்து உடலிலிருந்து குறையும் அளவை நுண்கணிதக் குறியான $\frac{dy}{dt}$ என்ற குறியீட்டால் குறித்துக் கொள்வோம். இது Y உடன் நேர் விகிதத்தில் அமைந்திருப்பதால்

$$\frac{dy}{dt} = -ky.$$

குறைக் குறி மருந்து குறைந்துகொண்டு வரும் வேகம் குறைந்துகொண்டே வருகிறது என்பதைக் குறிக்கின்றது.

தொகை காணல் முறையில் $Y = Y_0 e^{-kt}$ என அறிகின்றோம்.

இதன் வரைபடத்தை வரைய, அது கீழ்க்கண்ட வடிவில் இருக்கும்.



படம் 1.

இவ் வரைபடத்தைப் பார்த்தவுடனேயே இது பல்வேறு வடிவமைப்புகளை ஒத்திருக்கிறது என்பதை அறிகின்றோம்.

1. ஒரு கடத்தியிலிருந்து கசியும் மின்சாரத்தின் அளவு.
2. ரேடியக் கதிர் வீச்சின் சிதைவு (கடிகாரத்தில் ஒளிவிடும் புள்ளிகள் போன்றது.)
3. இரசாயன மாறுபாட்டு வீதம்.
4. தோல் காயம் ஆறும் வேகம்.
5. சொத்துகளின் தேய்மானம்.

இவ்வொற்றுமை தற்செயலானது அல்ல. மேலே கண்ட ஒவ்வொன்றின் வடிவமைப்பும் பின்கண்ட சம்பந்தத்திலிருக்கும்:

$$Y = A e^{-kt}.$$

இது ஓர் அடுக்குக் குறி வடிவமைப்பாகும். இச் சமன்பாடுகளின் ஒரு சிறப்பு என்னவெனில், என்ன வீதத்தில் ஒரு சார்பு மாறுகிறதோ அது அச் சார்பின் மதிப்புகளுடன் ஒத்த விகிதத்தில்

இருக்கும். பின்கண்ட வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளிலும் அடுக்குக் குறிச் சார்புகள் அமையும்.

1. முதலீடுகளின் ஆய்வு. (முதலீடுகளின் மதிப்பு மாறுவீதம் தம் முதலீடுகளின் அளவைப் பொறுத்திருக்கும்.)

2. மக்கள் தொகை அதிகரிப்பு. (மக்கள் பெருக்க வீதம் மக்கள் தொகையின் அளவை ஒத்த விகிதத்திலிருக்கும்.)

3. நுண் கிருமிகளின் வளர்ச்சி.

மேலே கண்ட வளர்ச்சியை யொட்டிய வடிவமைப்புகளில் $\frac{dy}{dt} = ky$ என்ற நுண் கணித சமன்பாட்டைக் கண்டு அதைத் தொகுக்க, $y = Ae^{kt}$ என்ற முடிவுப் பயனைக் காண்கின்றோம்.

ஜீன் வடிவமைப்பு

பாரம்பரியம் என்பது பரம்பரையாக வரும் பண்புகளைப் பற்றி ஆயும் அறிவியல் ஆகும். இவ்வகையான பண்புகள் எல்லாம் பெற்றோர்களிடம் இருந்து பெறும் ஜீன் சோடிகளின் மூலமே தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. பெரும்பான்மையான இரண்டு அடிப் படை அமைப்புகளில் அமைகின்றன. அவைகள், ஒன்று ஆதிக்கம் செலுத்துபவைகளாக இருக்கும் அல்லது பின்னடையும் இயல்புடையவைகளாக இருக்கும். உதாரணமாக மனிதர்களின் கண்களின் நிறம் ஒரு சோடி ஜீன்களால் தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. பழுப்பு நிறக் கண்கள் (B) ஆதிக்கம் செலுத்துபவைகளாகவும் நீல நிறக் கண்கள் (b) பின்னடையும் தன்மை உள்ளவைகளாக வும் இருக்கின்றன என்று கொள்வோம். BB தன்மை உடைய ஜீன்களையோ அல்லது Bb தன்மையுடைய ஜீன்களையோ ஒருவர் கொண்டிருந்தால் அவரது கண்கள் பழுப்பு நிறம் கொண்டவை களாக இருக்கும். ஏனெனில், B என்பது ஆதிக்கம் செலுத்தும் தன்மை கொண்டது. அவன் bb தன்மை உடைய ஜீன்களைக் கொண்டவனாக இருந்தால் அவனது கண்கள் நீல நிறமாக இருக்கும். (ஒவ்வொரு வகையிலும் முதலெழுத்து தந்தையிட மிருந்து பெற்ற ஜீனையும், இரண்டாம் எழுத்து தாயிடமிருந்து பெற்ற ஜீனையும் குறிக்கிறது.) பொதுவாகக் கூறினால் உட்குழு மண உறவு முறையைக் கையாண்டால் பாரம்பரிய பண்பிணைப்பு

ஏற்படும். (நமது உதாரணத்தில கண்ணின் நிறம்) 60 விழுக்காடு நீல நிறக் கண்களை உண்டாக்கும் ஜீன்களையும், 40 விழுக்காடு பழுப்பு நிறக் கண்களை உண்டாக்கும் ஜீன்களையும் கொண்ட ஒரு மனித இனம், அரிதான உட்குழு மண உறவு குறையால் இந்நிலையிலிருந்து மாற்றம் பெறும் என்று நம்பப்படுகின்றது. ஹார்டி என்ற கணித வலலுநரும் வில்ஹீம் R. வெயின் பெர்க் என்ற மருத்துவரும் தனித்தனியாக ஜீன்களின் கணித வடிவமைப்பு ஒன்று கண்டு அதன்மூலம் மேற்கண்ட கருத்து தவறானது என்றும், அரிதான உட்குழு மண உறவுமுறை பரம்பரைப் பண்புகளை மாற்றாது எனவும் நிரூபித்துள்ளனர்.

B, b ஜீன்களைக் கொண்ட மனித இனத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். p = கண்கள் நீல நிறத்தை உண்டாக்கும் ஜீன்கள் இவற்றின் விகிதம் $= 60\% = \frac{3}{5}$ (மேலே எடுத்துக்கொண்ட உதாரணத்தில்) q = பழுப்பு நிறத்தை உண்டாக்கும் ஜீன்கள். இவற்றின் விகிதம் $= 40\% = \frac{2}{5}$. $\frac{3}{5}$ பாகம் நீல நிறத்தை உண்டாக்கும் ஜீன்களைக்கொண்டு இருக்கிறது எனக் கொண்டால் அக்கூட்டத்தில் $\frac{3}{5}$ பாகம் மக்கள் நீல நிறக் கண்களைக் கொண்டுள்ளார்கள் என்ற பொருளைத் தராது. $p+q=1$ என்பதை நினைவில் கொள்ளவேண்டும். அரிதான உட்குழு மண உறவு மேற்கொள்வதாகக் கருதுவோம்.

BB (பழுப்பு நிறக் கண்களை உடைய), Bb (பழுப்பு நிறக் கண்களை உடைய), bb (நீலக் கண்களை உடைய) கொண்ட மனித இனத்தின் வழித் தோன்றல்கள் பின்கண்ட முறையில் அமைந்திருப்பார்கள் :

அவை முறையே pp, $2pq$, qq ஆகும்.

$$p^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25};$$

$$pq = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

B கண் நிற ஜீன்களின் நிகழ்வெண்

$$= p^2 + \frac{2pq}{2}$$

$$= p^2 + pq$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{6}{25}$$

$$= \frac{10}{25}$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$= p.$$

(*Bb* மக்கள் *B*, *b* நிற ஜீன்களைக் கொண்ட இரு பிரிவாகப் பிரிந்து விடுவதால் $\frac{2pq}{2}$ என்ற உறுப்புத் தோன்றியது.)

உட்குழு மண உறவு முறை இருந்தபோதிலும் நீலக் கண் நிற ஜீன்களின் நிகழ்வெண்கள் அவர்களது மூதாதையரின் நீலக் கண் நிற ஜீன்களின் நிகழ்வெண்களை ஒட்டியே உள்ளதெனக் காண்கிறோம். இது ஹார்டி வெயின் பெர்க்கின் விதியை உறுதிப்படுத்துகிறது.

பொருளியலில் வடிவமைப்புகள்

பொருளியல் கோட்பாடுகளில் கணிதம் வெகு அரிதாக 19ஆம் நூற்றுண்டு வரை பயன்படுத்தப்பட்டு வந்தது. ஆனால், இன்றோ அந்நிலை மாறி கணித வடிவமைப்புகள் பொருளியலில் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புகழ்பெற்ற ஆங்கிலப் பொருளியலறிஞர் கீன்ஸ் இத்துறையின் முன்னோடி எனக் கூறலாம். அவரது ஆராய்ச்சிகள் கணித வடிவமைப்புகளை அடிப்படையாகக்கொண்டே அமைந்திருக்கின்றன. அவர் "மக்கள் சேமிப்பிற்குச் சமமாகவே முதலீடு இருக்கும் எனப் பலரும் கருதுகின்றனர். ஆனால் அவ்வாறு இருக்கத் தேவையில்லை என்பது சிறிது சிந்தித்தால் தெரிய வரும்" என்பதைப் போன்ற பல ஊகங்களின் அடிப்படையில் பல கணித வடிவமைப்புகளை உருவாக்கினார். இவை பலவும் இன்று உருவாக்கப்பட்டுள்ள உயிர் பொறியியல் கண்டுபிடிப்புகளை ஒத்திருப்பதைக் காணலாம்.

கீன்ஸின் கோட்பாடு இரண்டு அடிப்படைகளைக் கொண்டது:

1. உற்பத்தி சக்தியில் போடப்பட்ட முதலீடு சேமிப்பை நிர்ணயிக்கிறது. சேமிப்பு முதலீட்டை நிர்ணயிப்பதில்லை.

2. ஒரு நாட்டின் தேசிய வருமானம் என்பது சேமிப்பு மனப்பாங்கினைப் பொறுத்து அமைந்துள்ளது. அதன் உறவு பின்வருமாறு:

முதலீடு $(S) = sI$ அல்லது (I - தேசிய வருமானம், s – சேமிப்பு மனப்பாங்கு)

$$I = \frac{\text{முதலீடு}}{s} = \frac{S}{s}$$

மக்கள் அதிகமாக சேமிக்கத் தொடங்கினால், அதாவது s திடீரென அதிகரித்தால், நாட்டின் வருமானம் குறையும் என்பதை இது காட்டுகிறது. உதாரணமாக ஒரு குடும்பத் தலைவர் அதிகமாகச் சேமிக்கத் தொடங்கினார் என்றால், அவர் வாங்கும் பொருள்களில் சிக்கனத்தைக் கையாளுகிறார் என்பது வெளிப்படை. உற்பத்தியாளர்கள் இதனால் பாதிக்கப்படுவர். முதலீடு செய்வதற்கு அதிகமான பணம் இருந்தபோதிலும் முன்பு இருந்ததை விட இப்பொழுது குறைவாகத்தான் பண்டங்களை விற்க முடிகிறது. எனவே, அவர் பண்டத்தின் விலை குறைந்து மீள பண்டத்தின் விற்பனையை அதிகரிக்கும் முறையில் முதலீடு செய்ய வேண்டும் அல்லது விற்பனை அளவிற்கேற்ற வகையில் உற்பத்தியைக் குறைக்கத் தொழிலாளர்களை வேலை நீக்கம் அல்லது வேலை குறைப்புச் செய்யவேண்டும். இதனால் தொழிலாளர்களின் கூலி குறையும் நிலையில் நாட்டின் வருமானம் குறைகிறது.

பண வீக்கத்தின் போது மட்டும் தான் சேமிப்பை அதிகப்படுத்த ஊக்குவிக்க வேண்டும் என்றும் வேலையில்லாத் திண்டாட்டம், மற்றும் பொருளாதாரச் சுணக்கம் ஆகியவற்றின்பொழுது ஆடம்பரத்தையும், பணத்தைத் தண்ணீராகச் செலவழித்தலையும் ஆமோதித்தல் வேண்டும் என்றும் கீன்ஸ் வலியுறுத்தினார்.

இச் சூழ்நிலையை விளக்கும் மிக எளிய கணித வடிவமைப்பு:

$I = \frac{V}{s}$ என்பதாகும்.

I — தேசிய வருமானம்

S — சேமிப்பின் அளவு

V — முதலீட்டிற்குக் கிடைக்கும் தொகை

s — வருமானத்தில் சேமிப்பின் அளவு ($S = sI$)

இக் கணித வடிவமைப்பை மேலும் சற்றுச் சீரமைக்கலாம்.

X = ஏற்றுமதி மூலம் வரவு

m = இறக்குமதி மூலம் ஏற்படும் நாட்டின் வருமானம்.

மேலும் $m = mI$

எனவே, திருத்தப்பட்ட வடிவமைப்பின் வடிவம் $I = \frac{V+X}{s+m}$

இது பல முறைகளில் மேலும் நமக்குப் பயன்படுகிறது. மேலும், இரண்டு உறுப்புகளை நாம் சேர்க்கலாம்.

1. பண வீக்கத்திற்கான ஒரு காரணமாகிற அரசாங்கச் செலவு.

2. பொருளாதாரச் சுணக்கத்தின் ஓர் அம்சமான அரசு விதிக்கும் வரிகள் T.

$T = tI$ எனில் மேலே கண்ட வடிவமைப்பின் புதிய வடிவம் பின்வருமாறு :

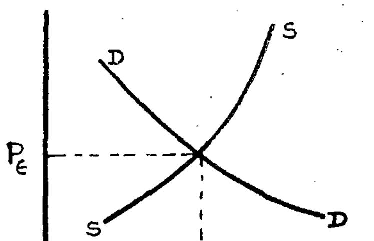
$I = \frac{V+X+G}{s+m+t}$ இது மேலே கண்டவற்றை விடச் சிறந்ததாகும்.

கொடுக்கபபட்ட ஒரு கடினமான பிரச்சினையை அணுகக் கணித வடிவமைப்பு எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதை மேலே கண்ட உதாரணத்திலிருந்து அறிந்துகொண்டோம். முக்கியமான விவரங்களைக் கொண்ட ஓர் எளிய கணித வடிவமைப்பு முதலில் உண்டாக்கப்பட்டது. மேலும் மேலும் பல விவரங்களைச் சேர்க்கும் பொழுது ஓர் அருமையான கணித வடிவமைப்பின் இறுதி உருவம் கிடைக்கின்றது.

பொருளாதார ஆய்வில் கணித வடிவமைப்பு அமைப்பதற்கான மற்றும் இரண்டு சூழ்நிலைகளை நாம் இங்கே காண்போம்.

1. ஒரு பண்டத்தின் சந்தை விலை

போட்டி நிறைந்த சூழ்நிலையில் ஒரு பண்டத்தின் சமநிலை விலையும் அப் பண்டம் சந்தையில் கிடைக்கும் அளவும் மொத்தத் தேவை, மொத்தக் கணிப்பு ஆகியவற்றைச் சார்ந்து அமையும். பொருளின் விலையின் தலைகீழ்ச் சார்பாகவும் அளிப்பு விலையின் நேர்ச் சார்பாகவும் அமையும். கணிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணல் போன்றது பொருளியலில் சமநிலை காண்பதென்பது. தேவை வளைவும், அளிப்பு வளைவும் வெட்டுமிடமே ஒரு பண்டத்தின் சமநிலை விலையையும், சந்தையில் கை மாறிய பண்டங்களின் சம நிலை அளவையும் காட்டும். கீழே கண்ட படத்தில் பொருளின் சம நிலை விலை P_E எனவும், அப்பொருளின் சமநிலை அளவு Q_E எனவும் காண்க.



படம் 2.

இவ்விரு சமன்பாடுகளின் வரைபடங்கள் இரு மாறிகளின் மதிப்பைத் தருவதால் இவ்வரைபட விளக்கத்தை இயற்கணித வடிவத்தில் கூற முற்படலாம்.

தேவை சார்பு $Q_d = 2000 - 100\,P$ ... I

என்ற சமன்பாட்டால் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது எனக் கொள்க.

Q_d — பொருளின் தேவைப்படும் அளவு.

P — விலை

அளிப்பு சார்பு $Q_s = -100 + 50\,P$ ... II

என்னும் சமன்பாட்டால் நிர்ணயிக்கப்படுகின்றது எனக் கொள்க.

Q_s — சந்தைக்கு வரும் பண்டத்தின் அளவு.

இப்பொழுது நமக்குக் கிடைத்திருப்பது இரு ஒருபடிச் சமன்பாடுகளாகும். அவற்றின் மாறிகள் சந்தையின் பண்டத்தின் அளவும், அதன் விலையும் ஆகும். தேவை சார்பின் வரைபடத்தின் சரிவு — 100 என்பதை முதல் சமன்பாடும், வழங்கப் பெறும் பண்டத்தின் அளிப்பு சார்பின் வரைபடத்தின் சரிவு +50 என்பதை இரண்டாவது சமன்பாடும் குறிப்பதால், இச் சமன்பாடுகளுக்கு ஒரு தீர்வுக் கணம் உண்டு என்பது உறுதியாகிறது.

பண்டத்தின் தேவையின் அளவும் அளிப்பின் அளவும் சமமாக இருந்தால்தான் அதன் விலை சமநிலையில் இருக்கும். $Q_d = Q_s$ என உள்ளபொழுது P சமநிலை விலையைக் கொடுக்கும்.

$$Q_d = Q_s$$

$$2000 - 100\,P = -100 + 50\,P$$

$$150\,P = 2100$$

$$P = 14$$

$$Q_d = 2000 - 100\,(14) = 600 = Q_s$$

சந்தையில் தேவை, அளிப்பு ஆகியவற்றின் சமநிலை அளவு 600 என்றும், சமநிலை விலை 14 என்றும் காண்கிறோம்.

2. *பல பண்டங்களின் சந்தைச் சமநிலை*

பொதுவாக ஒரு பண்டத்தின் தேவை அதன் விலையை மட்டும் பொருத்தல்லாது அது சம்பந்தப்பட்ட பிற பண்டங்களையும் சார்ந்து அமைகின்றது. இதேபோல் ஒரு பண்டத்தின் அளிப்பும் பிற பண்டங்களின் விலைகளைச் சார்ந்து அமையலாம்.

இத்தகைய சூழ்நிலையில் சந்தைச் சமநிலை பின்வருமாறு அமையும். அனைத்துப் பண்டங்களின் தேவையும் அளிப்பும் சமமாக இருத்தல் வேண்டும். இந் நிபந்தனைக்குட்பட்டு, சமநிலை விலை, சமநிலை அளவு ஆகியவற்றைக் காணலாம்.

உதாரணமாக, இரண்டு பண்டங்களின் தேவை அளிப்பு சார்புகள் ஒன்றையொன்று சார்ந்து இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

P_x — x என்ற பண்டத்தின் விலை

P_y — y என்ற பண்டத்தின் விலை

D_x — x என்ற பண்டத்தின் தேவை

D_y — y என்ற பண்டத்தின் தேவை

S_x — x என்ற பண்டத்தின் அளிப்பு

S_y — y என்ற பண்டத்தின் அளிப்பு

எனக் கொள்க.

தேவைச் சார்புகள்

$$D_x = 26 - P_x + P_y \quad \ldots (1)$$

$$D_y = 8 + P_x - P_y \quad \ldots (2)$$

என்றும்

அளிப்புச் சார்புகள்

$$S_x = -4 + 3P_x - P_y \quad (3)$$

$$S_y = -2 - P_x + 5P_y \quad (4)$$

என்றும் கொடுக்கபபடடுள்ளது. சமநிலை காண முற்படுவோம

$D_x = S_x$; $D_y = S_y$ எனக் கொள்ள.

$$4P_x - 2P_y = 30 \quad (5)$$

$$-2P_x + 6P_y = 10 \quad (6)$$

என்ற இரு ஒருபடிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன

இச் சமன்பாடுகளைத் தீர்வுகள் காண

$$P_x = 10$$

$$P_y = 5$$

இதனின்று, $D_x = S_x = 21$ எனவும்

$D_y = S_y = 13$ எனவும் நாம் அறியலாம்

இவ்வாருக நாம் ஒவ்வொரு பண்டத்தின் தேவை, அளிப்பு என்ற சார்புகளைப் பற்றி தெரித்துகொண்டால் பண்டங்களின் பொது நிலையைக் கணக்கிடலாம். 'n' பொருள்களுக்கு n தேவை சார்புகளும், 'n' அளிப்பு சார்புகளும் தேவையென்பது வெளிப்படை. இரண்டிரண்டு சமன்பாடுகளாக எடுத்துக் கொண்டு, மாறிகளை ஒன்று ஒன்ருகப் போக்கி முடிவாக எல்லாப் பண்டங்களின் சமநிலை விலைகளையும், அவை சந்தையில் வழங்கப் பட்ட அளவுகளையும் நாம் தீர்மானிக்கலாம்.

நிர்வாக வடிவமைப்புகள் (Management Models)

பொருளாதார, தொழில்நுட்பச் சூழ்நிலை, வியாபாரத்தில் கடும் போட்டிகள் ஆகியவைகள் காரணமாகத் தொழில் அல்லது

நிர்வாகத்தில் முடிவெடுத்தல் என்பது மிகச் சிக்கலான செயல் ஆகிவிட்டது. கணித வடிவமைப்புகள் முடிவெடுத்தலுக்கு மிகவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

ஒரு நிர்வாகம் A, B, C என்ற மூன்று வகைத் துணிகளை உற்பத்தி செய்கின்றது எனக் கொள்வோம். சிவப்பு, பச்சை, நீலம் ஆகிய நிறங்களில் அதற்குக் கம்பள நூல் வேண்டும் எனக் கொள்க. மேலும் A ரகத் துணியின் ஓர் அலகுக்கு 2 அலகு சிவப்பு நூலும் 3 அலகு நீல நூலும் வேண்டும் எனக் கொள்க B ரகத் துணிக்கு ஓர் அலகிற்கு 3 அலகு சிவப்பு நூலும் 2 அலகு பச்சை நூலும் 2 அலகு நீல நூலும் தேவை எனக் கொள்க C ரகத் துணிக்கு 1 அலகிற்கு 5 அலகு பச்சை நூலும் 4 அலகு நீல நூலும் தேவை எனக் கொள்க. ஆனால் அக்கம்பெனியிடம் 8 அலகு சிவப்பு நூலும் 10 அலகு பச்சை நூலும் 15 அலகு நீல நூலும் தான் இருக்கின்றன. 1 அலகிற்கு A ரகம் ரூ 3ம், B ரகம் ரூ. 5-ம், C ரகம் ரூ. 4-ம் இலாபம் தரும். தன்னிடமிருக்கும் கச்சாப் பொருள்களைக் கொண்டு அதிக வருமானம் பெறுவதற்கு எவ்வகைத் துணிகளை, எவ்வளவு தயாரிக்க வேண்டும் எனக் காண்க.

அக்கம்பெனி A, B, C ரகத் துணிகளை முறையே x_1, x_2, x_3 அலகுகள் தயாரிக்கிறது எனக் கொள்க. தேவைப்படும் நூல்களின் அளவுகள் பின்வருமாறு:

சிவப்பு நூல்: $2x_1 + 3x_2$

நீல நூல் : $3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

பச்சை நூல் : $2x_2 + 5x_3$

கிடைக்கும் இலாபம் $3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ ஆகும்.

கச்சாப் பொருள்களின் அளவுகளைக் குறிக்கும் சாம்யங்கள்

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$2x_2 + 5x_3 \leq 10$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$

மேலும், $x_1, x_2, x_3 \geq 10$

இந் நிபந்தனைக்குட்பட்டு இலாபம் $z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$ ஐ மேலே கண்டவற்றை கணிதத்தின் புதிய துறையான கோட்டுத் திட்டமிடலைப் பயன்படுத்தி ஒரு கணித வடிவமைப்பாக மாற்றி x_1, x_2, x_3 ஐக் காணலாம்.

நியூட்டன் ஒரு வடிவமைப்பு வல்லுநர்

நியூட்டனின் அண்டத்தைப் பற்றிய வடிவமைப்பானது இன்றும் கணித வடிவமைப்புகளில் மகோன்னதமானதெனக் கருதப்படுகிறது. அவரது காலத்தில் மக்கள் அசைவற்ற நிலைத் தன்மையே மிகச் சிறந்ததென அரிஸ்டாடிலின் கொள்கையை நம்பி வந்தனர். நியூட்டனின் வடிவமைப்பானது அறிவியல் சிந்தனையில் ஒரு மாபெரும் புரட்சியை விளைவித்தது.

பூமி சூரியனைச் சுற்றிவரும் பாதையை ஈர்ப்பு சக்தியின் மூலமாக நியூட்டன் விளக்கினார். பூமியின் சுழற்சி சூரியனை மட்டுமல்லாமல் பிற கோள்களையும் ஒட்டியிருப்பதால் பூமியின் உண்மையான பாதையை நிர்ணயிப்பது மிகச் சிக்கலானது. ஆனால் நியூட்டன் ஓர் எளிய வடிவமைப்பைத் தேர்ந்தெடுத்தார்.

கீழ்க்கண்ட எடுகோள்கள் இவ்வடிவமைப்பைப் பெற அடிப்படையாக அமைந்தன.

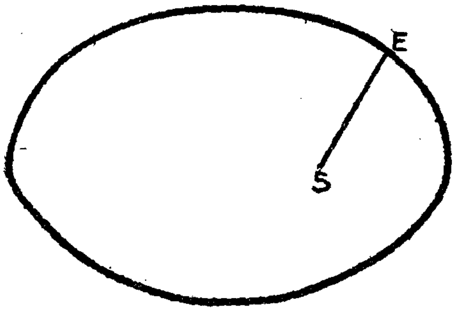
1. பிற கோள்களினால் ஏற்படும் ஈர்ப்பைப் புறக்கணிக்கலாம்.

2. சூரியனை அதன் பொருண்மையெல்லாம் P என்ற புள்ளியில் இருப்பதாகக் குறிக்கலாம்.

3. அதுபோலவே பூமியை E என்ற நிலையான புள்ளியாகக் குறிக்கலாம்.

4. விதிகட்குட்பட்ட விசைகள் S, E ஆகிய பொருண்மைப் புள்ளிகளில் செயல்படுத்தப்படுகின்றன.

ஈர்ப்பு விசை விதிக்கான வடிவமைப்பு $F = G\frac{mm_1}{r^2}$ என்று நியூட்டன் கொண்டார். இப்பொருள்களுக்கிடையேயுள்ள ஈர்ப்பு விசை அவற்றின் பொருண்மைகளின் பெருக்கற் பலனிற்கு நேர்



படம் 3.

விகிதத்திலும், அவற்றிற்கிடையேயுள்ள தூரத்தின் வர்க்கத்தின் எதிர் விகிதத்திலும் என்று பொருள்படும். G என்பது நியூட்டனின் ஈர்ப்பு அனைத்து நிலையெண் எனப்படும். விசையானது அண்டத்தில் எங்கும் ஒரே வலுவானது என்றும் பண்டங்களிடையேயுள்ள இடைவெளி விசையைப் பாதிப்பதில்லை என்றும் நியூட்டன் வலியுறுத்தினர். ஆனால் பொருள்களுக்கு இடையிலுள்ள தூரம் ஈர்ப்பின் தன்மையை மாற்றும் வல்லமை கொண்டதாகும்.

இவ் வடிவமைப்பின் மூலமாக Sஐ குவியமாகக் கொண்ட ஒரு நீள் வட்டப் பாதையில் E செல்லும் என்று நியூட்டன் கண்டார். கோள்களின் பாதைகளைப் பற்றி இவ்வெளிய முடிவுகள் பின்னர் கண்ட பல ஆராய்ச்சிகளிலும் உறுதிசெய்யப்பட்டுள்ளன என்பது வடிவமைப்புகளின் முக்கியத்துவத்தை எடுத்துக்காட்டுகிறது.

வடிவமைப்புகளைப்பற்றி இதுவரை கண்டவற்றை இப்பொழுது தொகுத்துத் தந்துள்ளோம்:

1. மூல உருவங்களின் மாற்று வடிவங்களே வடிவமைப்புகளாகும்.

2. வடிவமைப்புகளைத் தயாரிக்கும்பொழுது, நமது ஆராய்ச்சிக்குத். தேவையான, முக்கியமான செய்திகளை மட்டுமே கருத்திற் கொண்டு மற்றவற்றை விட்டுவிட வேண்டும்.

3. இத்தகைய புறக்கணிப்பினால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் வடிவமைப்பினின்று மூல உருவங்களைப் பற்றி ஆழ்ந்து அறியப் பயன்படும்.

4. கணிதச் சமன்பாடுகளாக அமைக்கப்பட்ட வடிவமைப்புகள் கணித முறையில் ஆயப்பட்டுக் கிடைக்கும் முடிவுகள் மூல உருவத்தினைப் பற்றி முடிவெடுக்க இயலச் செய்யும்.

5. வடிவமைப்புகளைப் பக்குவப்படுத்தியும், சீராக்கியும் மூல உருவத்தினைப் பற்றி பரந்த அமைப்பினைத் தரும் முறையில் மாற்றி அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

t என்ற வேகத்தில் ஒரு நுண்ணுயிர் பிறப்பிடத்தில் உள்ள நுண்ணுயிர்களின் எண்ணிக்கை $y = K_0 e^{5t}$ என்ற சமன்பாட்டால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $t = 0$ என்னும் நேரத்தில் அவற்றின் எண்ணிக்கைகளைக் காண்க. எப்பொழுது ஆரம்பத்தில் இருப்பதைப் போல் இரு மடங்காகும்?

$t = 0$ என்னும் சமயத்தில்

$$y = k_0 \, e^0 = k$$

இக்கூட்டம் ஆரம்பத்தில் இருந்ததைப் போல் இரு மடங்காக,

$2\,k_0 = k_0 e^{5t}$ என்ற சமன்பாட்டால் 't' கொடுக்கப்படும்பொழுது,

$$\text{அதாவது } 5t = \log_e 2$$

$$\text{அதாவது } t = \frac{\log_e 2}{5}$$

$$= \frac{0.69315}{5}$$

$$= 0.1386 \text{ கால அலகுகள்}$$

எடுத்துக்காட்டு

மக்கள்தொகையின் வளர்ச்சி வீதம் பல ஆண்டுகளாக மாறாது இருந்தால், மக்கள்தொகை ஓர் அடுக்குக்குறிச் சார்பால் குறிக்கப்படும் என்று காட்டுக. [மக்கள்தொகையின் வளர்ச்சி வீதம் என்பது மக்கள் தொகையில் ஓர் ஆண்டில் ஏற்படும் மாறுதலுக்கும் அவ்வாண்டு ஆரம்பத்திலிருந்த மக்கள்தொகைக்கும் உள்ள விகிதமாகும்.]

P_0 — தொடக்க ஆண்டில் மக்கள்தொகை.

P_1 — ஓர் ஆண்டு முடிவில் உள்ள மக்கள்தொகை.

P_2 — இரண்டு ஆண்டுகள் முடிவில் உள்ள மக்கள்தொகை.

P_r — r ஆண்டுகள் முடிவில் உள்ள மக்கள்தொகை.

பெருக்க வீதம் $= \dfrac{P_1 - P_0}{P_0} = k$ (நிலை எண்) கொள்கையின்படி.

$$P_1 = P_0 + P_0 k = (1 + k) P_0$$

$$P_2 = (1 + k) P_1 = (1 + k)^2 P_0$$

$$P_3 = (1 + k) P_2 = (1 + k)^3 P_0$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$P_t = (1 + k)^t P_0 = A^t P_0$$

இது அடுக்குக்குறிச் சார்பாகும்.

விளக்கம் :

ஒரு நிறுவனத்திற்குத் தேவையான பண்டங்களை வாங்கும் பொழுது, ஆண்டுத் தேவை முழுவதையும் ஒரேயடியாக வாங்கலாம். அப்பொழுது அப் பண்டங்களைப் பாதுகாப்பாக ஓர் ஆண்டிற்கு வைக்கக் கிடங்குச் செலவு அதிகரிக்கும். ஆனால், பண்டங்களை ஒரே ஆணை அல்லது கோரலில் பெறுவதால், மீளக் கோரல் செலவு குறையும். அதற்கு மாறாக, பகுதி பகுதியாக நாம் பண்டங்களை வாங்குகிறோமென்றால், கிடங்குச் செலவு குறையும். மீளக்கோரல் செலவு எத்தனை முறை கோருகின்றோமோ அதற்கேற்ப அதிகரிக்கும்.

பிரச்சினை :

ஒரு நிறுவத்தின் ஆண்டுத் தேவை S அலகுகளென்றும், கோரல் செலவு ஒரு கோரலிற்கு F என்றும், பண்டத்தின் விலை அலகு ஒன்று P என்றும், ஆண்டு கிடங்குச் செலவு அலகிற்கு I என்றும் கொள்க. ஆண்டு மொத்தச் செலவு மிகக் குறைவாக இருக்க, கோரல் அளவின் உத்தம அளவினைக் காண்க

தீர்வு :

ஒரு கோரல் அளவு x அலகுகள் எனக.

ஆண்டின் தேவை S அலகுகள் ஆகலாம். மொத்தக் கோரல்கள் $\dfrac{S}{x}$

$$\text{கோரல் செலவு } R = F\frac{S}{x} \qquad (1)$$

ஒரு கோரலிற்குப் பண்டங்கள் வந்ததும், x அலகுகள் கிடங்கிலிருக்கும். அடுத்த கோரல் கேட்கும் பொழுது 0 அலகுகள் கிடங்கிலிருக்கும். எனவே. ஒரு கோரல் காலத்தில் சராசரியாக $\frac{x+0}{2}$ அலகுகள் கிடங்கில் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

கிடங்குச் செலவு 1 அலகிற்கு I

எனவே $\frac{x}{2}$ அலகுக்கான கிடங்குச் செலவு $= I\frac{x}{2}$ ...(2)

பண்டங்களின் விலை $= P.S$ ...(3)

ஆண்டு மொத்தச் செலவு $C =$ கோரல் செலவு + கிடங்குச் செலவு + பண்டங்களின் விலை

$$= F\frac{S}{x} + I\frac{x}{2} + P.S.$$

c-ன் எல்லை மதிப்புக் காண்க.

$$\frac{dc}{dx} = \frac{I}{2} - \frac{F.S}{x^2}$$

$$\frac{d^2c}{dx^2} = \frac{2FS}{x^3} > 0$$

c-ன் மிகக் குறைந்த அளவு காண

$\frac{dc}{dx} = 0$ என்பதை விடுவிக்க வேண்டும்.

$$\frac{I}{2} - \frac{F.S}{x^2} = 0$$

(அ-து.) $I x^2 = 2FS$

$$x = \sqrt{\frac{2\,F\,S}{I}}$$

எடுத்துக்காட்டு

ஆட்சியியலில் கணிதத்தைப் பயன்படுத்திய முன்னோடி *L. F.* ரிச்சர்டுசன் என்பவர். இரண்டு எதிரி நாடுகளின் பாதுகாப்பு வரவு செலவுப் பட்டியலில் ஏற்படும் மாறுதல்களின் விதத்தைக் குறிக்கப் பின்வரும் கணித வடிவமைப்பைத் தருகின்றனர்.

x, y என்பன அந்நாடுகளின் பாதுகாப்பு வரவு செலவும் பட்டியல்களைக் குறிக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{dx}{dt} = k_1 y - k_2 x + k_3$$

$$\frac{dy}{dt} = c_1 x - c_2 y + c_3$$

$k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3$ என்பன மாறிலிகள்

$k_1, k_2, c_1, c_2 > 0$

இவ்வமைப்பினின்று,

(1) ஒரு நாட்டின் செல்வத் தளர்ச்சி

(2) எதிரி நாட்டின் அச்சுறுத்தல்

(3) ஒரு நாட்டின் மீது மற்ற நாட்டின் பொது மனப்பான்மை

ஆகியவற்றை எவ்வுறுப்புகள் குறிக்கின்றன எனக் காண்க.

தீர்வு :

$\frac{dx}{dt} = k_1 y - k_2 x + k_3$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம். x என்பது அந்நாட்டின் வரவு செலவுத் திட்டத்தைக் குறிக்கின்றது. எதிரி நாட்டின் அச்சுறுத்தல் அதிகமாக இருப்பின் இத்திட்டத்தின் மதிப்பு அதிகரித்திருக்கவேண்டும். அதாவது $\frac{dx}{dt}$ என்பது y உடன் நேர் விகிதத்திலிருக்க வேண்டும்.

நாட்டின் செல்வத் தளர்ச்சி என்பது திட்டத்தின் அதிகரிப்புக்கு ஒரு தடை ஆகும். எனவே, $-k_2 x$ என்ற உறுப்பு இத் தளர்ச்சியினைக் காட்டும். ஒரு நாடு அதனெதிரியின் மீது கொண்ட பொது மனப்பான்மை ஒரு மாறிலியாகலாம். k_3 இம் மனப்பான்மையைக் குறிக்கும். இவ்வுறுப்பும் வரவு செலவுத் திட்டத்தின் அமைப்பில் ஒரு பங்கு பெறுகிறது.

இதே போல் மற்ற நாட்டின் வரவு செலவுத் திட்டத்தில் ஏற்படும் மாறுதலான $\frac{dy}{dt}$ என்பது கீழ்க் காணும் மூன்று தன்மைகளால் தீர்மானிக்கப்படுகின்றது.

(i) எதிரி நாட்டின் அச்சுறுத்தல் '$c_1 x$' என்ற மிகை உறுப்பால் குறிக்கப்படுகின்றது.

(ii) நாட்டின் செல்வத் தளர்ச்சி குறை உறுப்பான '$-c_2 y$' ஆல் குறிக்கப்படுகின்றது.

(iii) மற்ற நாட்டின் மீதான இந்நாட்டின் பொது மனப்பான்மை 'c_3' என்னும் தனி உறுப்பால் குறிக்கப்படுகின்றது.

பயிற்சி

(1) மாறு வெப்ப நிலையில் ஒரு கொள்கலத்தினுள் உள்ள ஒரு வாயுவால் உண்டாக்கப்படும் அழுத்தம் அக் கொள்கலத்தின் கொள்ளளவுடன் எதிர் விகிதத்தில் அமைந்திருக்கும் என்பதற்கான கணித வடிவமைப்பைக் காண்க.

(2) பாலன் என்பவர் ரூ. 11,000த்தை 5% கூட்டு வட்டி வீதத்தில் முதலீடு செய்தார். இதற்கான ஒரு கணித வடிவமைப்பைத் தயார் செய்க.

(a) 4 ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவரது முதலீட்டின் மதிப்பைக் காண்க.

(b) t ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அவரது முதலீட்டின் மதிப்பைக் காண்க.

(3) ரேடியக் கதிர்ச் சிதைவு $y = k_0 e^{-0 \cdot 038t}$ என்ற சமன்பாட்டால் தீர்மானிக்கப்படுகின்றது. இதில் y என்பது காலம் t-ன் (நூற்றுண்டுகளில்) பொழுது சிதையா கதிரியக்கத்தின் அளவினையும், k_0 என்பது t_0 காலத்தில் அதன் அளவினையும் ($t = 0$ என்பதற்குத் தகுந்த) குறிக்கின்றன. தொடக்க அளவில் பாதியே மீந்திருக்க எத்தனை காலமாகும் என்பதைக் காண்க. $(\log_e \frac{1}{2} = -0 \cdot 69315)$

(4) ஒரு சிறிய கம்பெனி A, B என்ற இரு பொருள்களை விற்பனை செய்கிறது. A-ல் பண்டமொன்றுக்கு ரூ 5-ம், B-யில் பண்டமொன்றுக்கு ரூ. 2-ம் இலாபம் பெறுகிறது. Aயை உற்பத்தி செய்ய மூன்று மணிகளும், Bயை உற்பத்தி செய்ய 1 மணியும் ஆகிறது. ஒரு நாளைக்கு அதிக பட்சமாக 16 மனித மணிகளே உற்பத்தி செய்ய முடியும். ஒவ்வொரு நாளும் குறைந்த பட்சம் 3-A-க்கள் உற்பத்தி செய்தாக வேண்டும். 1 முதல் 4 வரை Bக்குள் ஒரு நாளைக்கு உற்பத்தியாகிறதெனில், இதை விளக்கும் கணித வடிவமைப்பை உருவாக்குக.

(5) ஒரு வீடு கட்டும் நிறுவனம் A, B, C என்ற மூன்று வகையான வீடுகளைக் கட்டுகின்றது. அதற்கான செலவும் வாடகையும் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வகை	கட்டுமானச் செலவு (ரூ. 10^4-யில்)	மாத வாடகை (ரூபாய்)
A	2	50
B	5	150
C	8	300

மொத்த முதலீடு ரூ. 4×10^7யை மிகக் கூடாது. குறைந்தது 50% வீடுகள் A வகை வீடுகள் என்றும், C வகை வீடுகள் 20 %க்கு மேற்படக் கூடாதென்றும் நிபந்தனைகளிருந்தால், இதை ஒட்டிய ஒரு கணித வடிவமைப்பைத் தயார் செய்க.

(6) தாமஸ் மால்த்தூஸ் என்பவர் 18 ஆம் நூற்றுண்டைச் சேர்ந்த மக்கள்தொகை ஆய்வாளர் ஆவார். மக்கள் பெருக்கம் ஒரே வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது என்பதை அவர் கண்டறிந்தார். ஆனல் விவசாயத்திற்குக் கிடைக்கும் நிலம் குறிப்பிட்ட ஓர் அளவிற்குட்பட்டதே என்பதால் உணவு உற்பத்தி மனிதத் தேவைகளை முழுக்கப் பூர்த்தி செய்யாது என்றும் அதனுல் பஞ்சம் உண்டாகும் என்றும் அவர் கூறினர். தொடர்கள் பற்றிய அறிவைப் பயன்படுத்தி மால்த்தூஸ் கூறிய கருத்துகளைப் பற்றி விளக்க முடியுமா?

(7) உடலில் ஏற்படும் வெப்பநிலை மாற்றம், உடலின் வெப்பத்திற்கும் சுற்றுப்புற வெப்பத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் மாறும் என நியூட்டன் கொண்டார். இதை விளக்க ஒரு கணித வடிவமைப்பைத் தயார் செய்க.

(8) ஒரு தூண்டுகையின் சக்திக்கேற்பவோ, சக்தியில் மாற்றத்திற்கு ஏற்பவோ ஏற்படும் உணர்வின் அளவினைக் காண உள இயற்பியல் முயல்கிறது. எடுத்துக்காட்டாக ஒரு கோட்டின் நீளத்தை இரு மடங்காக்கினால் அது இரண்டு மடங்காக ஆனதைக் காண்கிறோமா? அது போலவே, எடை, நிறம், மின் தாக்குதல் ஆகியவற்றை எவ்வாறு உணர்கிறோம்?

x என்ற தூண்டுகையின் ஏற்பட்ட உணர்வின் அளவைக் குறிக்கிறது எனக் கொள்வோம். உணர்வின் மாற்றம் தூண்டுகையின் மாற்றத்திற்கு நேர் விகிதத்திலும், மற்றும் அது தூண்டுகையின் ஏற்படும் மாற்றமும் தூண்டுகையின் அளவிற்குமுள்ள விகிதத்திற்கு நேர் விகிதத்திலும் இருக்கிறதென்றால் $y = k \log x + c$; c யும், k யும் தனித்த உறுப்புகள் என்பது உணர்வின் கணித வடிவமைப்பைக் காட்டுகிறது எனக் காட்டுக.

(9) குறுகிய கால அளவுகளில், மக்கள்தொகையில் ஏற்படும் மாறுதலானது அதன் அளவினைப் பொறுத்திருக்கும் எனக் கொள்வது ஏற்கத்தக்கது. ஆனால் உணவுப் பற்றுக்குறை, நச்சுக் கலப்பு போன்ற கட்டுப்படுத்தும் பல காரணங்களால் மேலே கண்ட கருத்து நீண்ட காலத்திற்குப் பொருந்தாது. சூழ்நிலைகளை யொட்டிய கட்டுப்பாடுகள் காரணமாக, ஒரு குறிப்பிட்ட வட்டாரத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட அதிகபட்ச மக்கள்தொகையையே பராமரிக்க இயலும்.

கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கேற்ப 'n' என்பது அதிகப்படியான மக்கள்தொகை என்போம். தற்பொழுதைய மக்கள்தொகை P என்போம். மக்கள்தொகை பெருக்கத்தின் நேரடியாகத் தற்போதைய மக்கள்தொகையின் பருமனை ஒத்து இருப்பதுடன் மக்கள்தொகையை அதிகரிக்க உள்ள ஆற்றலையும் பொறுத்து இருக்கும். இதற்கான ஒரு கணித வடிவமைப்பைத் தயார் செய்க.

(10) S, a என்ற இரு எழுத்துகளைக் கொண்ட ஓர் எளிய மொழியை எடுத்துக்கொள்வோம். S என்பது ஆரம்ப நிலையையும்,

'a' என்பது முடிவு நிலையையும் குறிக்கும் குறியீடுகள் எனக் கொள்க. முடிவுக்குறியினால் ஆன சொற்களாலானது அம் மொழி எனக. இம்மொழியின் இலக்கணம் கீழ்க் கண்ட இரு விதிகளினால் வடிவமைக்கப்படுகின்றன:

$$S \rightarrow a\,S\,a$$

$$S \rightarrow a$$

முடியுமானால் நாம் மேற்கண்ட இருவிதிகளையும் எத்தனை முறை வேண்டுமானாலும் எந்த வரிசையிலும் பயன்படுத்தலாம். இம் மொழியின் சொற்கள் $a^{2n+1}; n \in W$ என்ற வடிவத்தில் அமைந்திருக்கும் என்று காட்டுக

பகுதி G

விடைகள்

(2) $y = (1 \cdot 05)^4 \, r$

ரூ. 121.5 - 50 ; $P_t = (1 \cdot 05)^t \, P_0$.

(3) 18·24 நூற்றாண்டுகள்.

(4) $3x + y \leq 16$; $x \geq 3$; $y \geq 1$; $y = \leq 4$ என்னும்படியாக,

அதிகபட்சம் $P = 5x + 2y$

(5) $2x + 5y + 8z \leq 400$;

$$x \geq \frac{x + y + z}{2} ; \; z \leq \frac{x + y + z}{5} ; \; x \geq 0 ; \; y \geq 0 ; \; z \geq 0$$

என்னும் சமயத்தில்,

அதிகபட்சம் $c = 30x + 150y + 300z$

(6) மக்கள்தொகைப் பெருக்குத் தொடரிலும் (G.P.), உணவு பரிமாறல் கூட்டுத் தொடரிலும் (A.P.) அதிகரிக்கிறது.

(7) $\dfrac{dT}{dt} = k\,(T - m)$

(9) $\dfrac{dp}{dt} = k\,p\,(m - p)$